

Inhalt

1. Einleitung	13
1.1 Relevanz des Argumentierens für den Mathematikunterricht	14
1.2 Studien zur Untersuchung des Argumentierens	16
1.3 Intention der vorliegenden Arbeit	22
1.4 Aufbau der vorliegenden Arbeit	24
2. Argumentieren	26
2.1 Einleitung	26
2.2 Etymologie des Begriffs „Argumentieren“	26
2.3 Argumentieren – allgemeine Begriffsbestimmung	27
2.4 Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsabgrenzungen	28
2.4.1 Curriculare Sichtweise	28
2.4.2 „Niveaustufen des Beweisens“ bei Holland	29
2.4.3 „Kontinuum des Begründens“ bei Brunner	30
2.4.4 Argumentieren und Beweisen als Kommunikationsformen	31
2.4.5 Eigene Sichtweise	31
2.5 Phasenmodell von Boero	32
2.6 Beweise	38
2.6.1 Beweis – Begriffsbestimmung	38
2.6.2 Funktionen von Beweisen	40
2.6.3 Kategorien von Beweisen	42
2.6.4 Zusammenfassung – Bedeutung von Beweisen im schulischen Kontext	50
2.7 Struktur von Beweisen und mathematischen Argumentationen	51
2.7.1 Drei-Ebenen-Modell für die Struktur von Argumentationen	51
2.7.2 Aussagen	54
2.7.3 Argumente	58
2.7.4 Argumentationen	68
2.7.5 Vollständigkeit und Korrektheit in der mathematischen Logik	70
2.8 Schematische Darstellungen von Argumentationen bzw. Beweisen	73
2.8.1 Freges der „arithmetischen nachgebildete Formelsprache“	73
2.8.2 Das „Schema einer Argumentation“ bei Toulmin	74
2.8.3 Dörners „Netzwerke von Sachverhalten und Operatoren“	79
2.8.4 Die „geometrische Repräsentation des Fortschrittes einer Lösung“ bei Pólya	80
2.8.5 Königs „Lösungsgraphen“ zur Darstellung des Lösungsplans	82
2.8.6 Hollands „Beweisgraphen“ zur anschaulichen Darstellung eines Beweises	83
2.9 Genese eines eigenen graphischen Repräsentationssystems	85
2.9.1 Forderungen an ein eigenes Repräsentationssystem	86
2.9.2 Beschreibung des eigenen Repräsentationssystems	86
3. Forschungsfragen	89
3.1 Forschungsziele	89
3.2 Forschungsfragen zur Gestaltung und Implementierung eines Trainings	89
3.3 Forschungsfragen zur Bewertung von Argumentationen	90
3.4 Forschungsfragen zur Evaluation der Trainingsvarianten	90
4. HeuRekAP-Trainingsvarianten	93
4.1 Einleitung	93
4.2 Zusammenhang zwischen Argumentieren und Problemlösen	93

4.3	Studien zu Argumentations- bzw. Problemlösetrainings	96
4.4	Allgemeine Darstellung des expliziten bzw. impliziten Trainings	99
4.4.1	Theoretische Fundierung	99
4.4.2	Heuristische Rekonstruktion	108
4.4.3	Allgemeines Vorgehen beim expliziten bzw. impliziten Training.....	109
4.4.4	Vergleich beider Trainingsvarianten mit dem Training von Bruder und Collet	112
4.5	Unterricht mit explizitem bzw. implizitem Training.....	116
4.5.1	Übersicht aller Unterrichtseinheiten während der Studie.....	116
4.5.2	Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis	118
4.5.3	Explizites Training in der Unterrichtseinheit „Quadratwurzeln/reelle Zahlen“	122
4.5.4	Implizites Training in der Unterrichtseinheit „Quadratwurzeln/reelle Zahlen“	127
4.5.5	Beweis der Irrationalität der Wurzel aus 2.....	130
5.	Auswertungsmethodik	133
5.1	Allgemeine Beschreibung des methodischen Vorgehens	133
5.2	Probandenauswahl	136
5.3	Aufgabenauswahl.....	147
5.4	Vorgehen bei der stoffdidaktischen und heuristischen Analyse.....	151
5.5	Analysen der ausgewählten Aufgaben.....	152
5.5.1	Aufgabe Winkel 1/Winkel 1 (var.).....	153
5.5.2	Aufgabe Raute 1	161
5.5.3	Aufgabe Raute 2	164
5.5.4	Aufgabe K18.....	168
5.5.5	Aufgabe K10.....	174
5.5.6	Aufgabe K10A	185
5.6	Methodische Überlegungen zur Untersuchung des Argumentierens	188
5.6.1	Beschreibung des Untersuchungsverfahrens.....	188
5.6.2	Graphische Repräsentation von schriftlichen Argumentationen.....	191
5.6.3	Bestimmung d. Argumentationskategorien mittels Qualitativer Inhaltsanalyse	196
5.7	Gütekriterien	210
5.7.1	Objektivität	210
5.7.2	Reliabilität.....	216
5.7.3	Validität	217
5.8	Statistische Auswertungswerkzeuge	218
5.8.1	Übersicht.....	218
5.8.2	χ^2 -Tests	219
5.8.3	Fishers exakter Test	221
5.8.4	Mann-Whitney-U-Test.....	223
5.8.5	McNemar-Test.....	224
5.8.6	Wilcoxon-Vorzeichenrang-Test.....	225
6.	Auswertung und Ergebnisse	227
6.1	Beschreibung ausgewählter Arbeitsergebnisse für die Aufgaben	228
6.1.1	Winkel 1.....	228
6.1.2	Raute 1/Raute 2.....	243
6.1.3	K18	266
6.1.4	K10/K10A.....	282
6.2	Allgemeine quantitative Untersuchungen	301
6.2.1	Betrachtung der Quartile.....	301

6.2.2	Varianzanalysen.....	305
6.3	Quantitative Querschnittsauswertungen.....	308
6.3.1	χ^2 -Tests.....	308
6.3.2	Fishers exakter Test.....	315
6.3.3	Mann-Whitney-U-Test.....	318
6.4	Quantitative Längsschnittauswertungen.....	321
6.4.1	McNemar-Tests.....	321
6.4.2	Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest.....	331
6.5	Auswirkungen der Trainingsvarianten auf den regulären Unterricht.....	336
6.5.1	Medianwertuntersuchungen.....	336
6.5.2	Mann-Whitney-U-Test.....	337
7.	Diskussion und Perspektiven.....	338
7.1	Zusammenfassung der Auswertungsergebnisse.....	338
7.2	Wirkungen der Trainingsvarianten.....	341
7.2.1	Allgemeiner Überblick.....	341
7.2.2	Querschnittuntersuchungen.....	349
7.2.3	Längsschnittuntersuchungen.....	353
7.2.4	Wirkung auf die Beherrschung regulärer Unterrichtsinhalte.....	356
7.3	Abgleich der Ergebnisse mit der Literatur.....	359
7.3.1	HeuRekAP im Vergleich mit anderen Interventionsstudien.....	359
7.3.2	Theorie des Argumentierens – Praxis des Argumentierens.....	366
7.4	Perspektiven.....	373
	Literatur.....	376
	Abbildungsnachweise.....	387
	Bedeutung der Kategoriensymbole.....	390