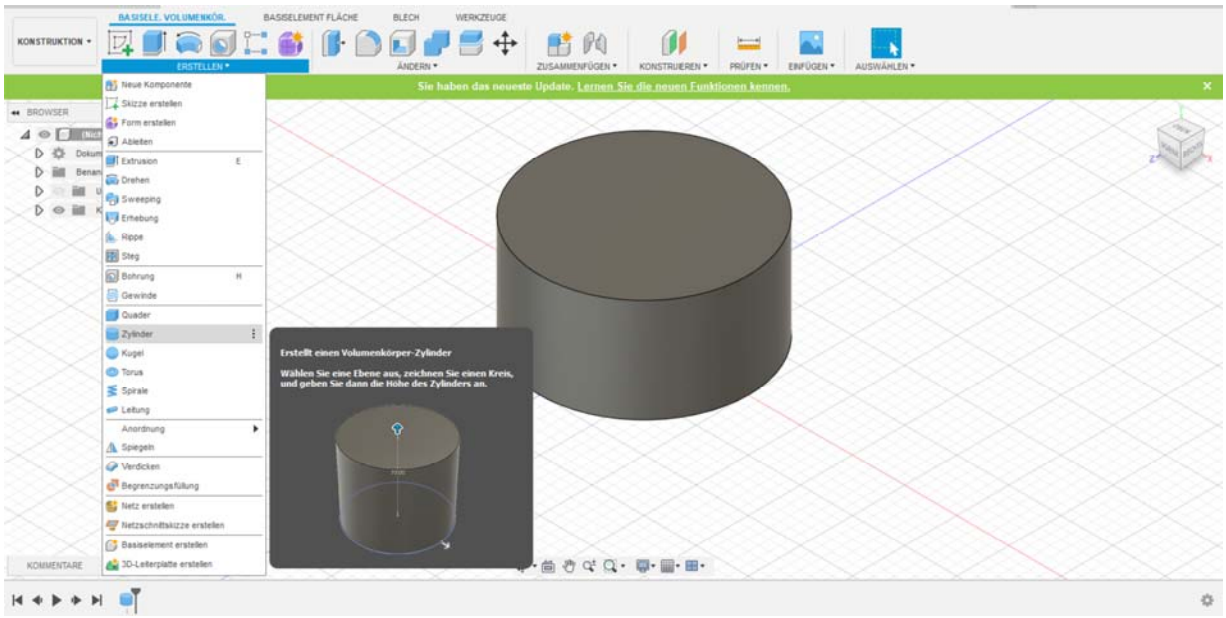
Lösungshinweise

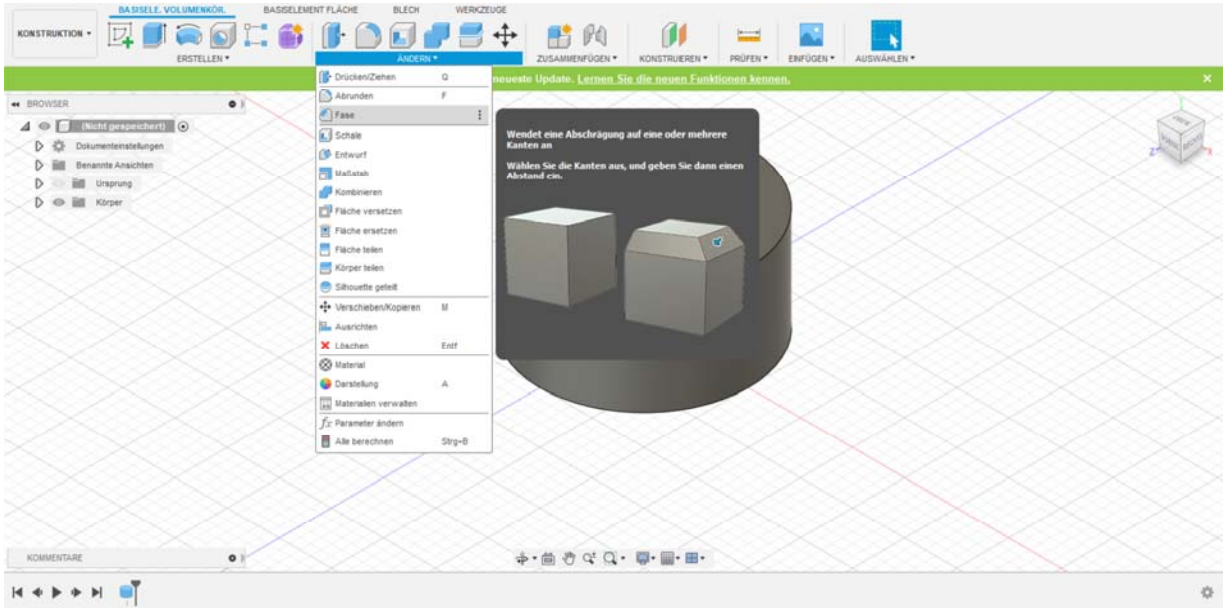
Zu 3.5.1 Die Parabelschablone – Eigenschaften quadratischer Funktionen diskutieren

Zu KV 3.5.1.1: **Die Parabel als Kegelschnitt**

1. Erstellt mithilfe des parametrisches Modellierungsprogramm Fusion360.

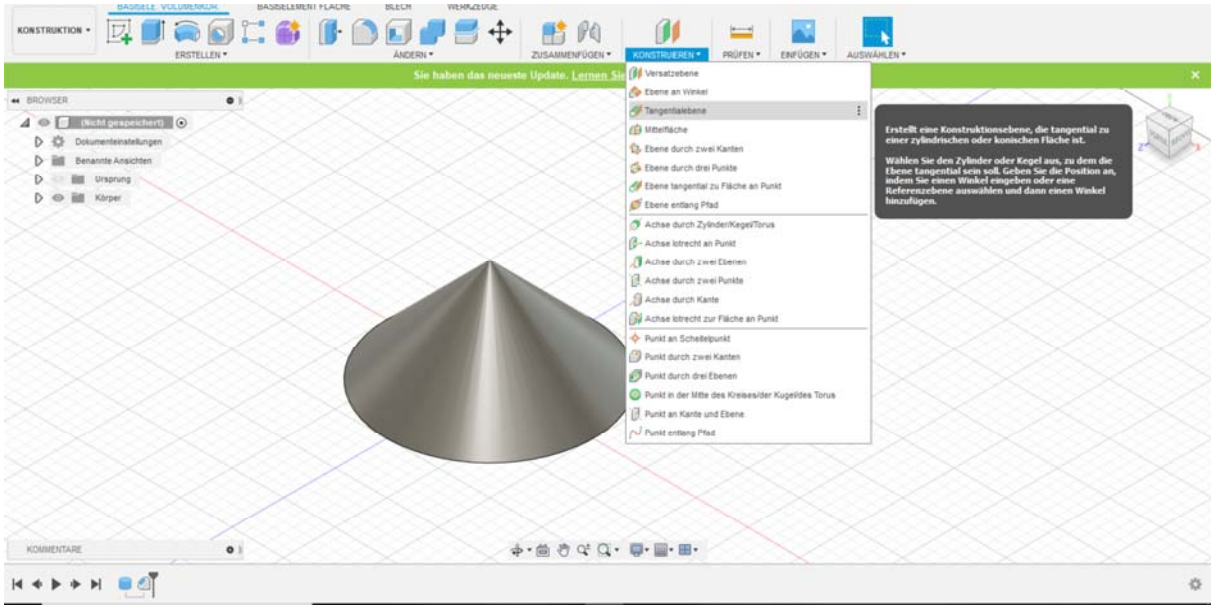
Schritt 1: Konstruieren eines Zylinders und Fasen der oberen Kante mit einem Winkel von 45°

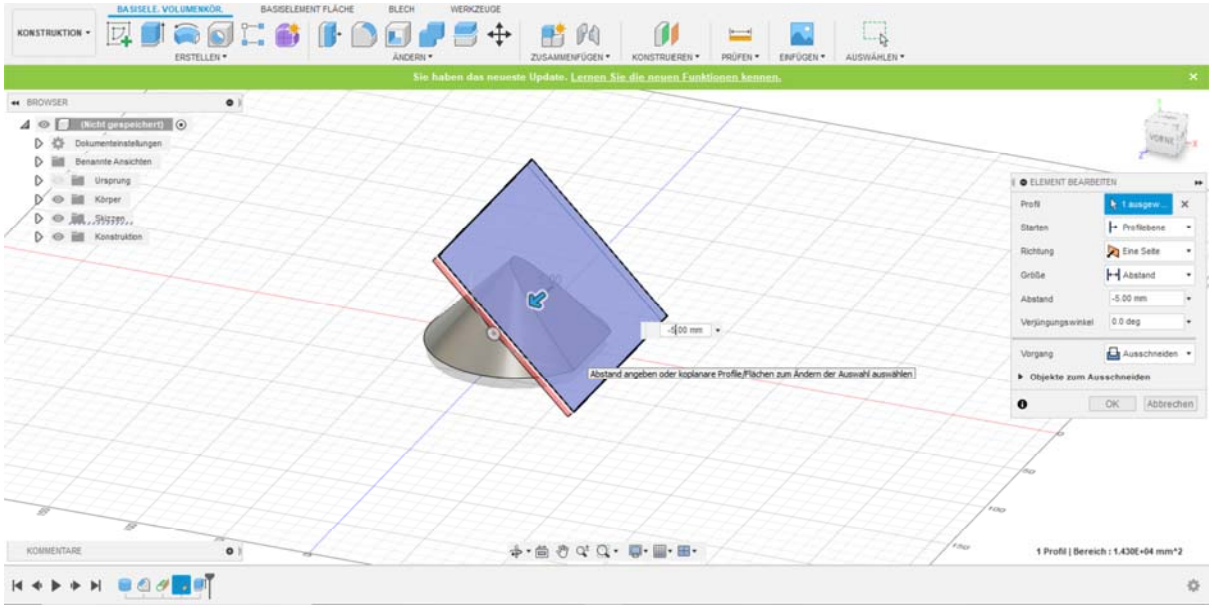




© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Schritt 2: Hinzufügen einer Tangentialebene, Zeichnen eines Rechtecks in dieser Ebene und lineare Extrusion im Modus „Ausschneiden“

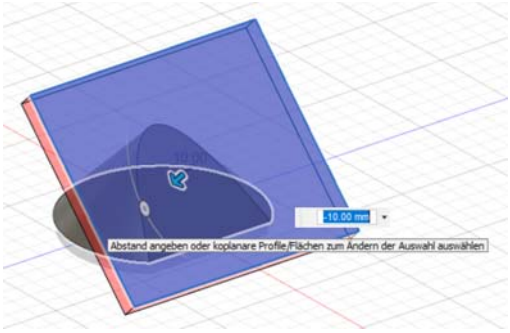


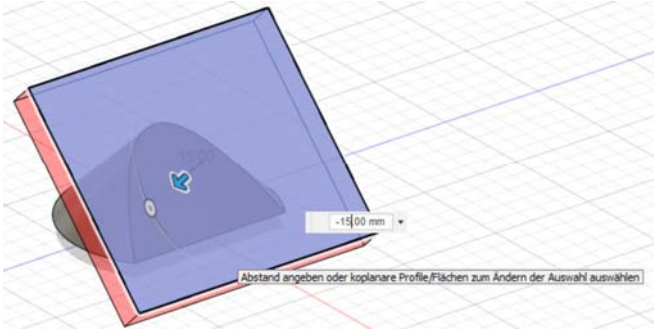


© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

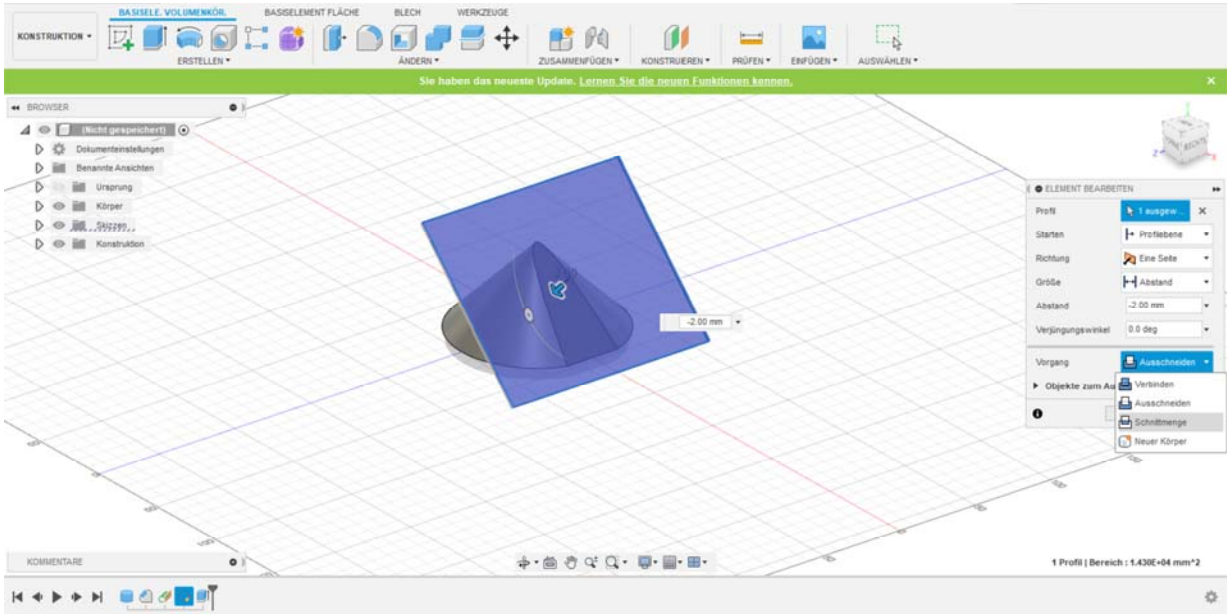
2.

- Die entstehende Schnittfläche ist parabelförmig.
- Die Kurve wird gekrümmter bzw. flacher.



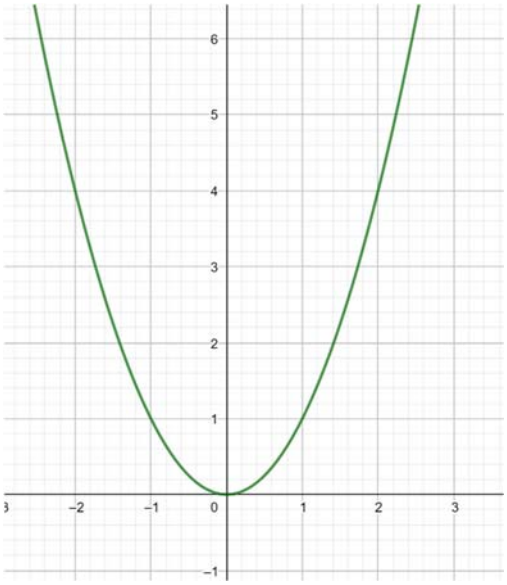


Schritt 3: Extrusion der Schnittfläche im Modus „Schnittmenge“



Zu KV 3.5.1.2: **Die Normalparabel**

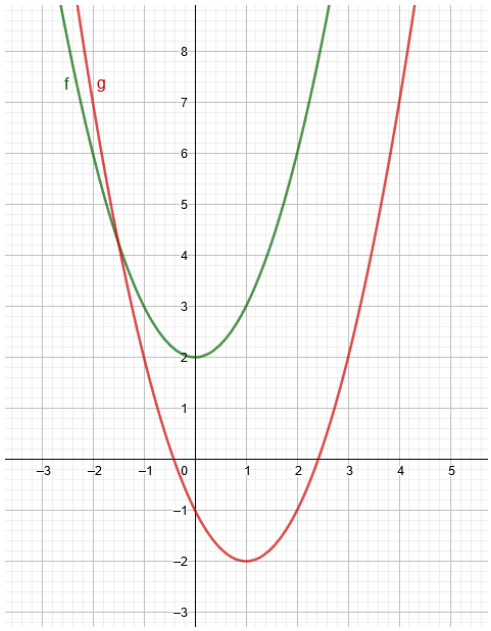
1.



2.

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

3. Für uns identisch zur Aufgabe 2. Natürlich kann es aber bei einer Zeichnung mithilfe der 3D-gedruckten Schablone Abweichungen von der berechneten Lösung geben.



Zu KV 3.5.1.3: **Verschieben einer Parabel**

1. Beispielhaft anhand folgender Funktionen:

$f(x) = x^2 + 2$

$g(x) = x^2 - 2x - 1$

Für $f(x) = x^2 + 2$ ergibt sich dann:

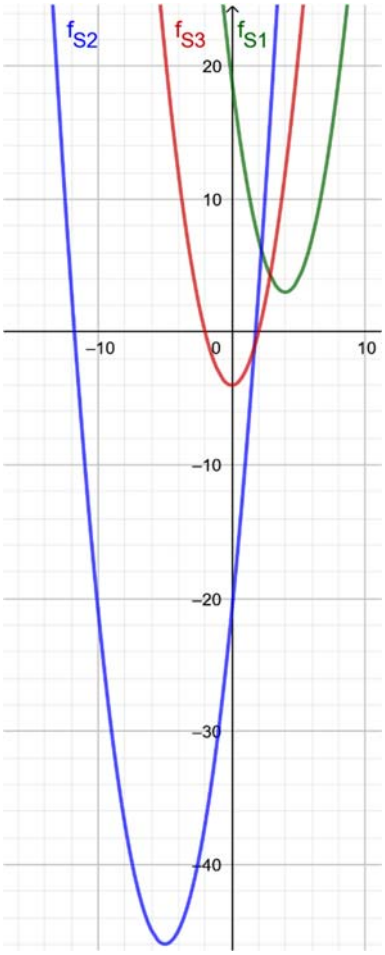
$a = 1, b = 0, c = 2$, also $S_f(0|2)$ und $f(x) = (x - 0)^2 + 2$

Für $g(x) = x^2 - 2x - 1$ ergibt sich dann:

$a = 1, b = -2, c = -1$, also $S_g(1|-2)$ und $g(x) = (x - 1)^2 - 2$

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

2.

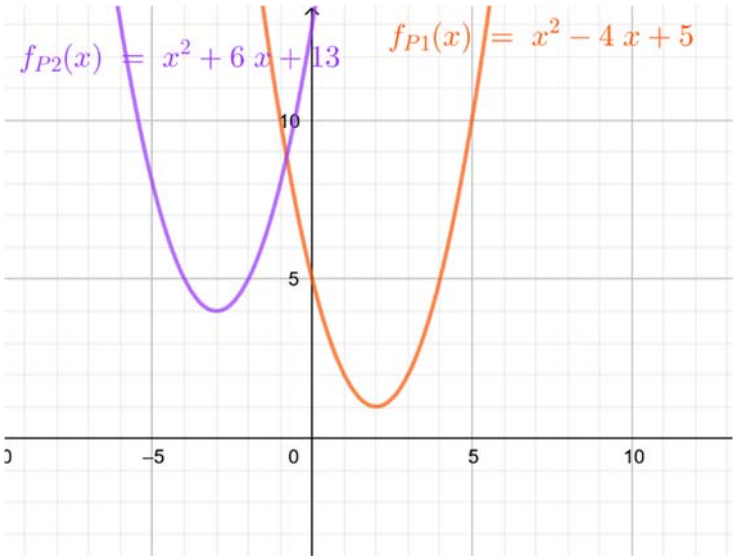


$f_{S1}(x) = (x-4)^2 + 3$

$f_{S2}(x) = (x+5)^2 - 4$

$f_{S3}(x) = (x-0)^2 - 4$

3.



$S_{P1}(2|1)$

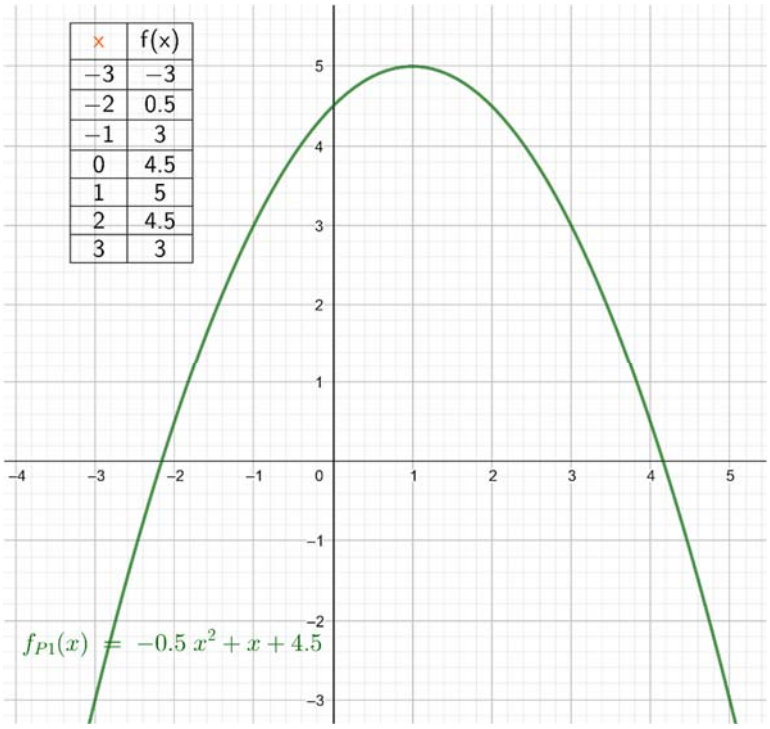
$S_{P2}(-3|4)$

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.1.4: **Strecken und Stauchen einer Parabel**

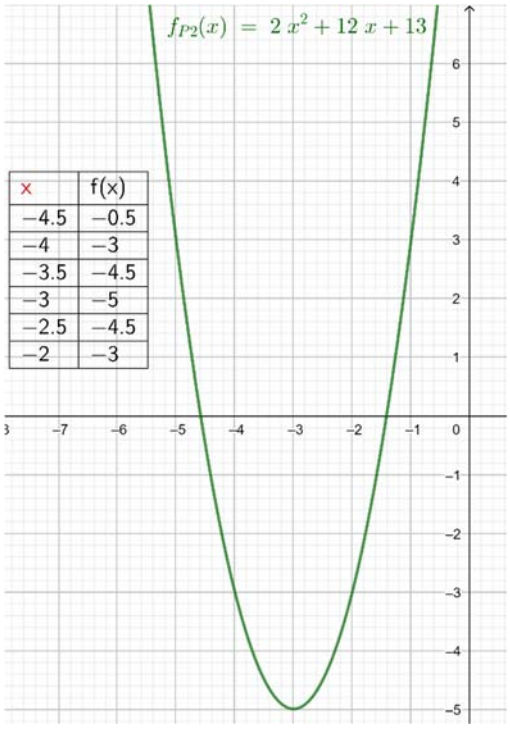
1. $f_{orange} = -2(x-3)^2, \qquad f_{blau} = \frac{1}{5}(x-0)^2 + 0 = \frac{1}{5}x^2$

2. $P_1: y = -0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 5$



x	f(x)
−3	−3
−2	0.5
−1	3
0	4.5
1	5
2	4.5
3	3

$P_2: y = 2 \cdot (x+3)^2 - 5$

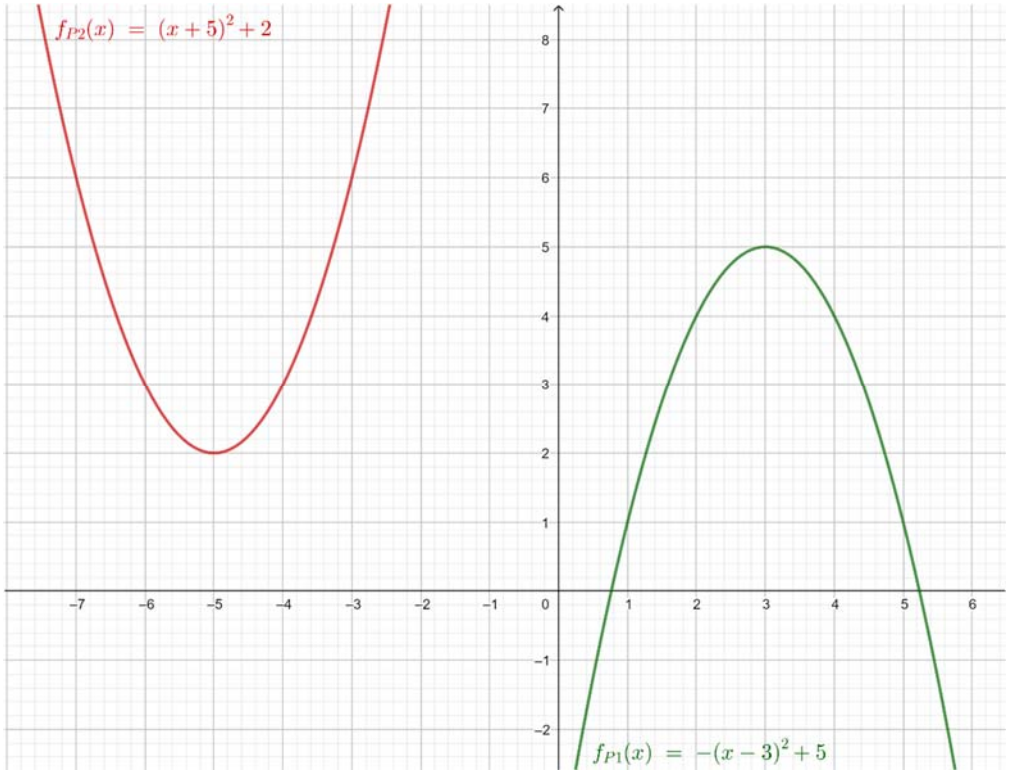


x	f(x)
−4.5	−0.5
−4	−3
−3.5	−4.5
−3	−5
−2.5	−4.5
−2	−3

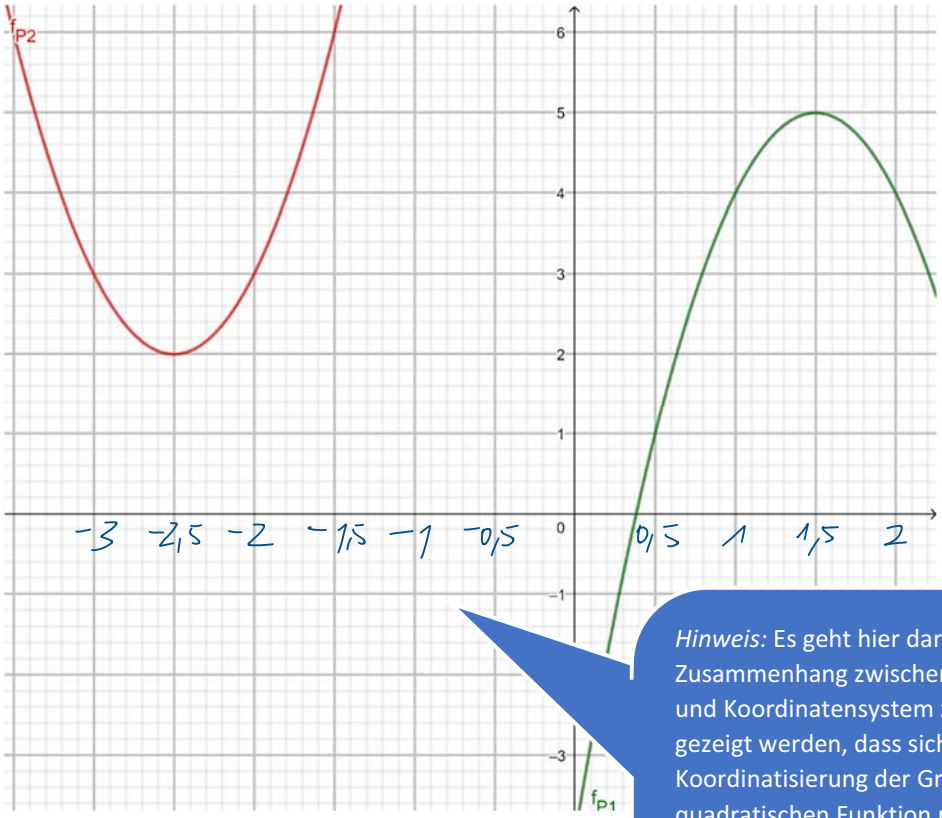
© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.1.5: **Wissen anwenden und vertiefen**

1.



2.



$f_{P1}(x) = -(x-1{,}5)^2+5$

$f_{P2}(x) = (x+2{,}5)^2+2$

Hinweis: Es geht hier darum, den Zusammenhang zwischen Funktionsgleichung und Koordinatensystem zu erfahren. Es kann gezeigt werden, dass sich bei geeigneter Koordinatisierung der Graph einer beliebigen quadratischen Funktion mit einer Parabelschablone zeichnen lässt. Andersherum kann eine Normalparabel abhängig von der Koordinatisierung durch unendlich viele verschiedene quadratische Funktionen beschrieben werden.

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu 3.5.2 Periodische Funktionen – Sinus und Kosinus abrollen und beschreiben

Zu KV 3.5.2.1: **Warm Up – Sinus und Kosinus am Dreieck**

1. $x = 6{,}5cm; y = 6cm; z = 3cm$ (mögliche gemessene Werte)

$\sin(\beta) = \frac{z}{x} = \frac{3cm}{6{,}5cm}, \cos(\beta) = \frac{y}{x} = \frac{6cm}{6{,}5cm}, \sin(\gamma) = \frac{y}{x} = \frac{6cm}{6{,}5cm}, \cos(\gamma) = \frac{z}{x} = \frac{3cm}{6{,}5cm}$

2. <u>1.</u>

$$\sin(60°) = \frac{7}{b} \Leftrightarrow b[\sin(60°)] = 7 \Leftrightarrow b(0{,}87) = 7 \Leftrightarrow b = 8{,}05$$

$$\cos(60°) = \frac{a}{8{,}05} \Leftrightarrow 0{,}5 = \frac{a}{8{,}05} \Leftrightarrow 4{,}04 = a$$

$$\alpha = 30°$$

<u>2.</u>

$$\alpha = \beta = 45°$$

$$\sin(45°) = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x[\sin(45°)] = 5 \Leftrightarrow x \cdot 0{,}71 = 5 \Leftrightarrow x = 7{,}04$$

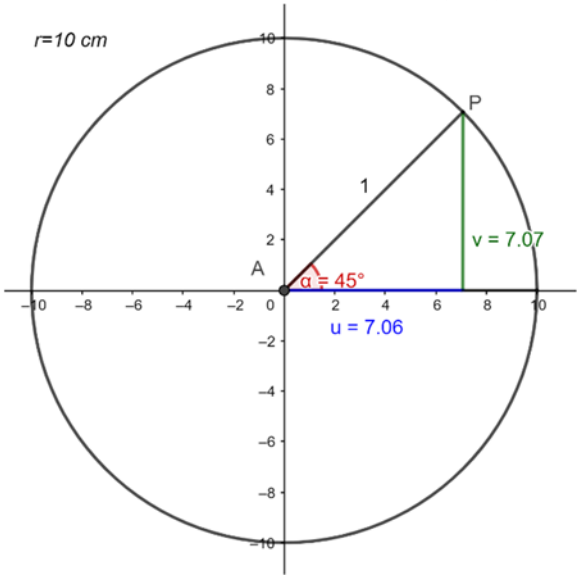
3.
a) $\beta \approx 45{,}58°, \gamma \approx 44{,}42°, c \approx 4{,}9cm$
b) $\alpha \approx 54{,}46°, \beta \approx 35{,}54°, c \approx 8{,}6cm$
c) $\alpha = 90°, b \approx 6{,}1cm, c = 3{,}5cm$

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.2.3: **Sinus und Kosinus am Einheitskreis**

1. Erkunden von Sinus und Kosinus am Einheitskreis

a) Beispielhaft für $\sin(45°)$ und $\cos(45°)$:



b) $\sin(45°) \approx 0{,}7;\ \cos(45°) \approx 0{,}7$
$\sin(60°) \approx 0{,}9;\ \cos(60°) \approx 0{,}5$
$\sin(325°) \approx -0{,}6;\ \cos(325°) \approx 0{,}82$
$\sin(405°) \approx 0{,}7;\ \cos(405°) \approx 0{,}7$
$\sin(-35°) \approx -0{,}5;\ \cos(-35°) \approx 0{,}8$
Z. B. wiederholen sich einige Werte oder für $sin(-35°)$ kann im Uhrzeigersinn entlang des Einheitskreises gewandert werden.

c) $\sin(0°) = 0, \cos(0°) = 1,$
$\sin(90°) = 1, \cos(90°) = 0,$
$\sin(180°) = 0, \cos(180°) = -1,$
$\sin(270°) = -1, \cos(270°) = 0,$
$\sin(360°) = 0, \cos(360°) = 1,$
Z. B. sind die Werte ausschließlich -1, 0 oder 1. Mit Bezug zum Gradmaß, würde es sich bei diesen Werten um eine Nullstelle oder einen Hoch- oder Tiefpunkt der Graphen der Funktion handeln. Die Werte wiederholen sich nach 360°.

d) Für $\sin(\alpha) = 0{,}25 : \alpha_1 \approx 14°, \alpha_2 \approx 166°,$
Für $\cos(\alpha) = 0{,}25: \alpha_1 \approx 76°, \alpha_1 \approx 284°$

2. Winkel im Bogenmaß

a) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}, 2\pi, -\frac{\pi}{2}$

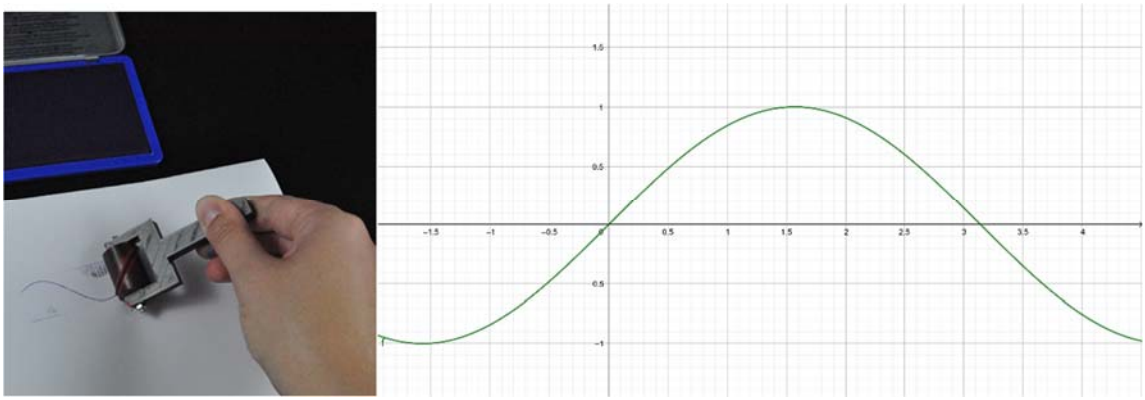
b) $0°, 90°, 57°, 180°, 0°, 360°, -90°, 270°$

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

KV 3.5.2.4: **Die Sinus- und die Kosinusfunktion – Erforschen des Sinusrollers**

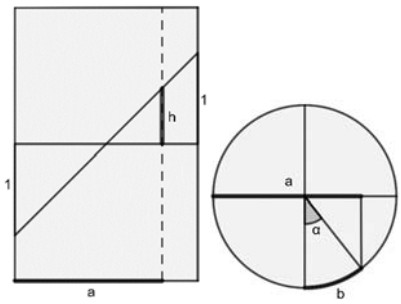
2. Abrollen einer Sinuskurve

b)



Anmerkung: Die Rolle muss so positioniert werden, dass der erste passende Abschnitt der Periode entsteht. Beispielweise eignet sich der Koordinatenursprung gut als Startpunkt, wo wir die Rolle passend (sozusagen mit dem Bogen nach oben) beginnen lassen.

c) Wir betrachten einen Zylinder mit einem Radius von 1, der von einer Ebene im Winkel von 45° geschnitten wird. Mit geeigneter Koordinatisierung lässt sich die Schnittkurve auf der Mantelfläche als Sinuskurve beschreiben. Dazu betrachten wir die zwei nachfolgenden Querschnitte des Zylinders.



Die Höhe h eines beliebigen Punktes A auf der Schnittkurve von Zylinder und Ebene kann in Abhängigkeit vom Abstand a zu der Seite des Zylinders mit dem tiefsten Punkt (aufgrund der Gleichschenkligkeit des Dreiecks, an dem h beteiligt ist) folgendermaßen ausgedrückt werden (linker Querschnitt):

$$\frac{h}{a-1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow h = a - 1$$

Die Bogenlänge b und damit der Winkel im Bogenmaß (Radius gleich 1) kann mit dem beschriebenen Abstand a durch trigonometrische Überlegungen in Verbindung gebracht werden (rechter Querschnitt):

$$\sin(b) = a - 1 \Leftrightarrow a = \sin(b) + 1$$

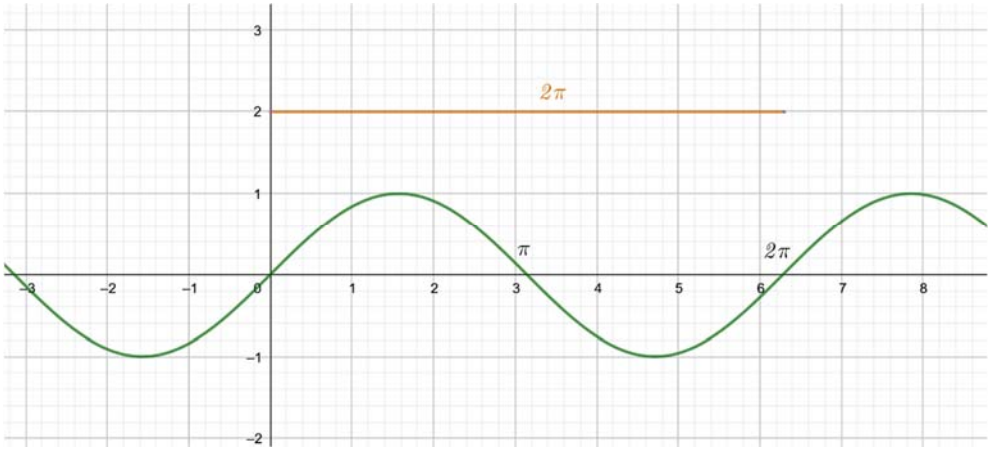
Damit erhält man die Höhe h als Funktion der Bogenlänge b (vgl. u.a. Henn & Filler, 2015):

$$h(b) = \sin(b)$$

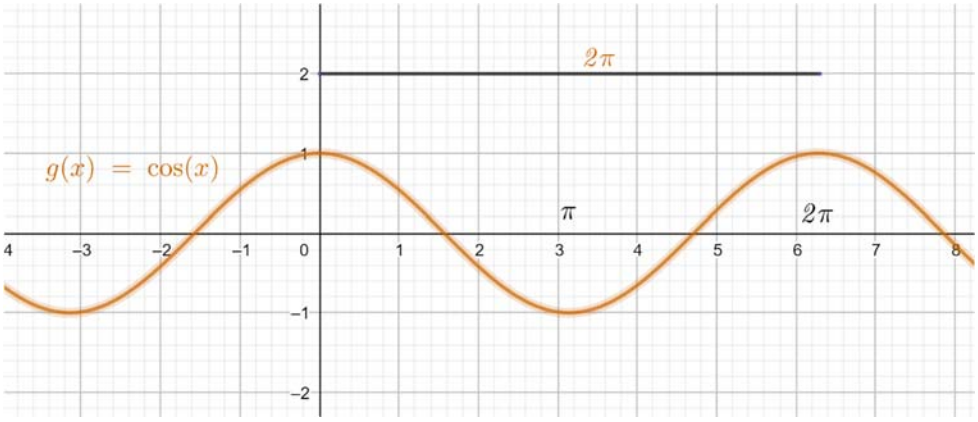
Diese Lösung ist natürlich sehr detailliert und umfangreich. Schülerinnen und Schüler können aber einzelne Aspekte der Begründung materialgebunden untersuchen bzw. nachvollziehen.

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

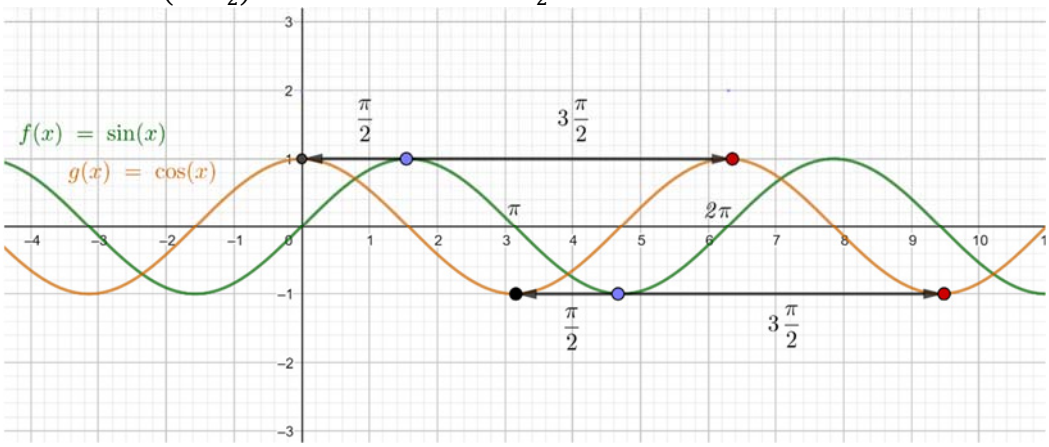
d) Bei der Sinusfunktion wiederholen sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abschnitten, d. h. die Sinuskurve verläuft periodisch. Die Funktionswerte (y-Werte) wiederholen sich gewissermaßen im selben Abstand. Die kleinste Periode der Sinuskurve ist eine Wellenbewegung oberhalb und unterhalb der x-Achse. In der Abbildung geht die kleinste Periode über die Länge von 2π. Der Sinusroller trägt genau eine Periodenlänge ab.



e) Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der Periode 2π. Sie lässt sich ebenfalls mithilfe des Sinusrollers erzeugen, da es sich um zueinander in x-Richtung verschobene Kurven handelt. Die Rolle muss passend z. B. im Punkt (0|1) angesetzt werden.



Für einen Zusammenhang zwischen sin(x) und cos (x) können wir festhalten:
Verschieben wir den Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links oder um $3\frac{\pi}{2}$ nach rechts, ist dieser gleich zu dem Graphen der Kosinusfunktion.
Damit ist $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin(x - 3\frac{\pi}{2})$.



© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Entsprechend gilt für den Graphen der Kosinusfunktion, wenn dieser um $3\frac{\pi}{2}$ nach links oder um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben wird, ist dieser gleich dem Graphen der Sinusfunktion.
Damit ist $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) = \cos(x + 3\frac{\pi}{2})$.

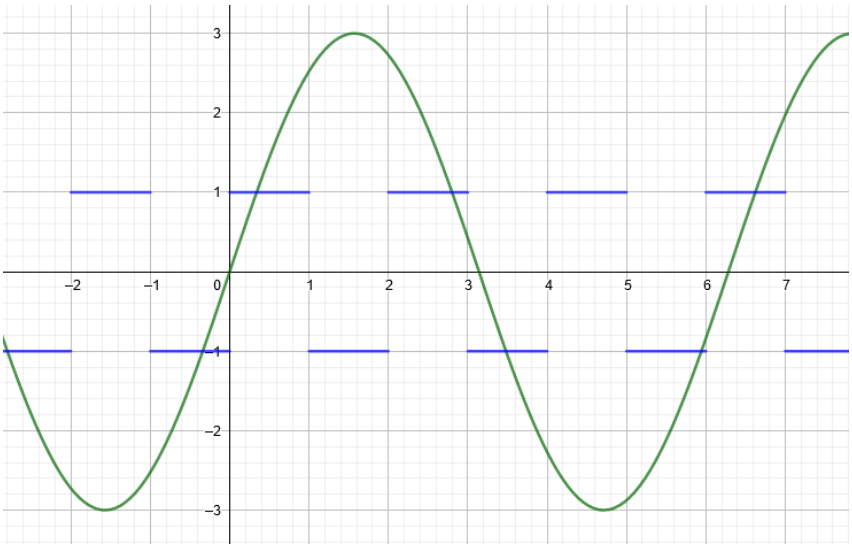
f) Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung (0|0). Dies lässt sich auch mit $\sin(-x) = -\sin(x)$ zeigen.
Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Dies lässt sich durch $\cos(-x) = \cos(x)$ zeigen.

Zu KV 3.5.2.5: **Den eigenen periodischen Kurvenroller konstruieren**

2. b) – d) Im folgenden Bild sind exemplarisch zwei periodische Kurven zu sehen.

Die grüne Kurve hat eine Periodenlänge von 2π und den Funktionsterm $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$.

Die blaue Kurve hat eine Periode von 2 und lässt sich mit dem Funktionsterm
$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 2k \leq x < 2k + 1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ -1 \text{ für } 2k + 1 \leq x < 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$ darstellen.



Es können Kurven mit unterschiedlichem Funktionsterm gestempelt werden, da der Kurvenroller an einer beliebigen Stelle im Koordinatensystem angesetzt werden kann. Dies entspricht einer Verschiebung entlang der x-Achse und der y-Achse.

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu 3.5.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit – handlungsorientierte Zugänge zur Differentialrechnung

Zu KV 3.5.3.1: **Warm Up – Zur Steigung linearer Funktionen**

1.

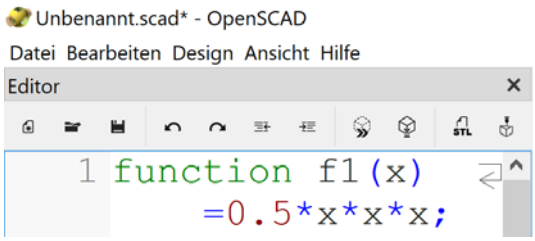
a) $f(x) = x + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 1$

2. Anhand der Steigung m eines Graphen einer linearen Funktion kann erkannt werden, wie steil der Graph einer linearen Funktion steigt oder fällt. Je größer der Betrag der Steigung ist, umso steiler steigt oder fällt die Gerade. Die Steigung eines Graphen einer linearen Funktion kann mithilfe des Steigungsdreiecks verdeutlicht werden. Am Steigungsdreieck kann abgelesen werden, wie sich beim Graph einer linearen Funktionen Koordinaten von Punkt P_1 zu Punkt P_2 ändern. Bei einer Verschiebung des Graphen einer linearen Funktion verändert sich die Steigung daher nicht.

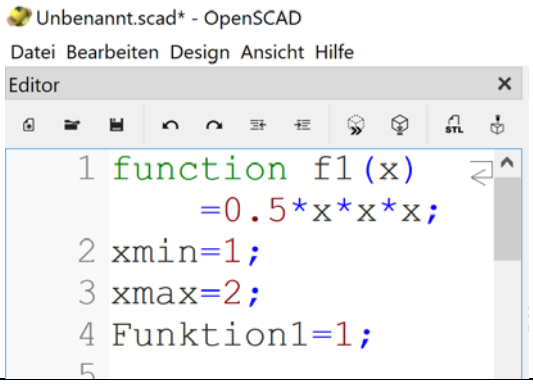
Zu KV 3.5.3.2: **Das Programm *Graphendrucker***

1. Wir bilden hier zum einen die Eingaben im Programm Graphendrucker, als auch die STL-Dateien der Graphen der Funktionen ab.

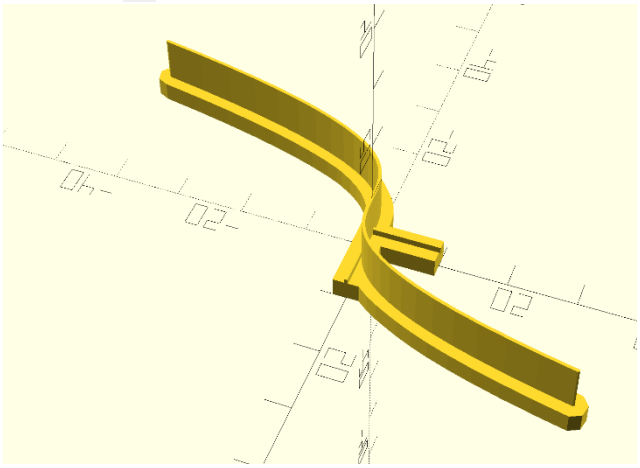
Schritt 1:



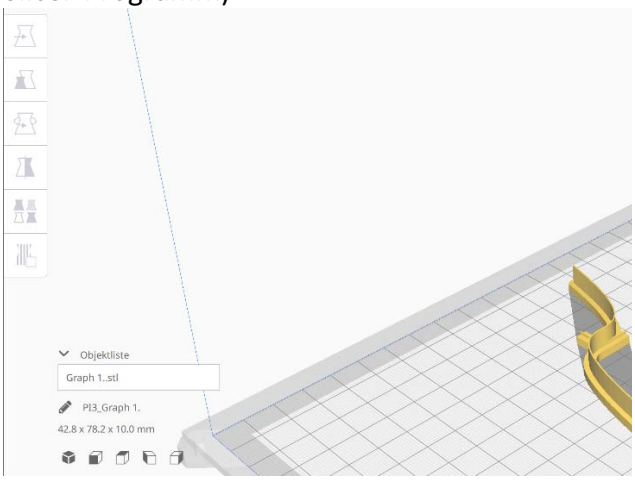
Schritt 2:



Schritt 3:

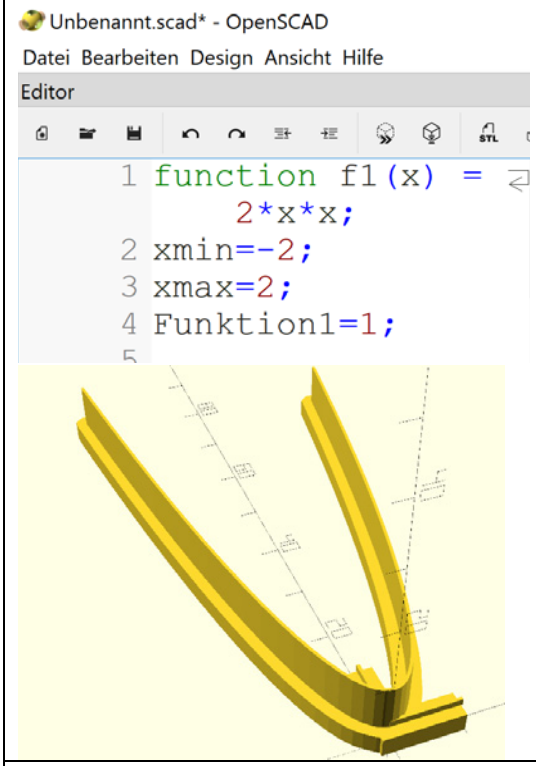


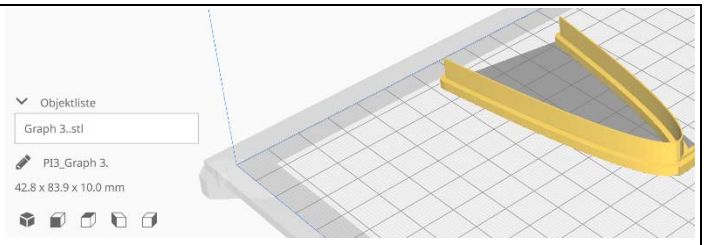
Schritt 4: (STL-Datei geöffnet in einem Slicer-Programm)

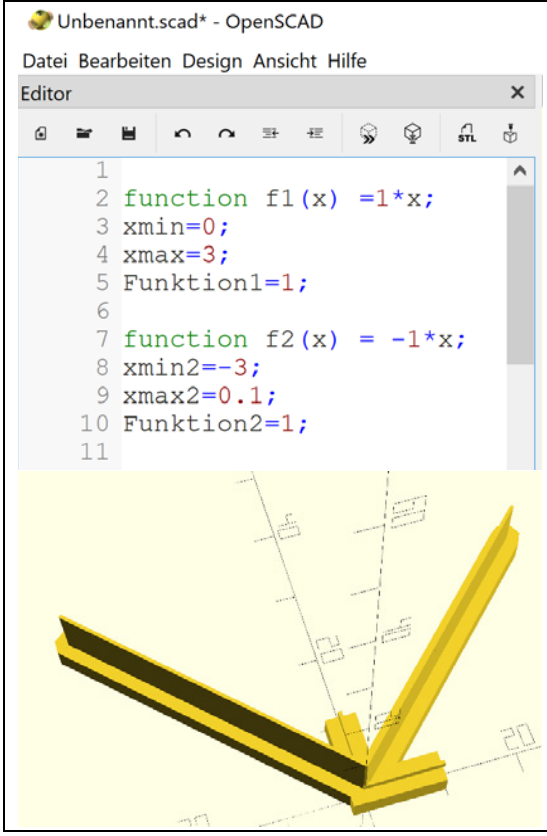


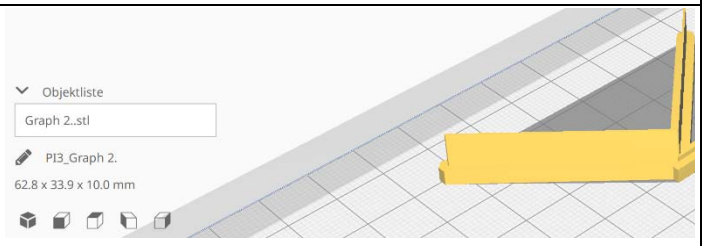
© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Lösungshinweise







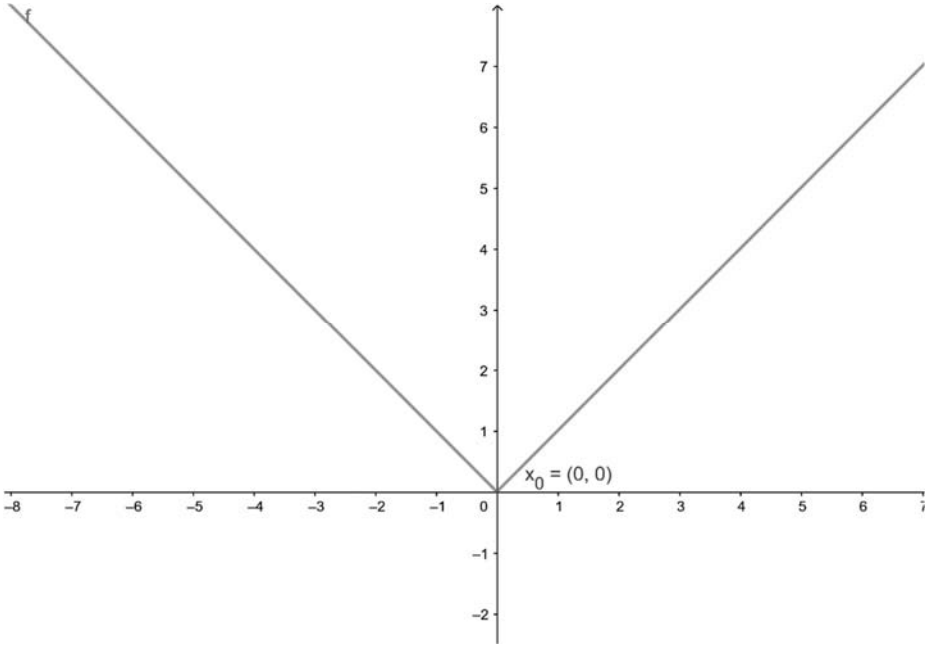


© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.3.3: **Funktionsgraphen untersuchen – Stetigkeit und Differenzierbarkeit**

1. a) Mit der Fingerspitze kann auf dem 3D-gedruckten Graph entlanggefahren werden. Auf diese Weise kann praktisch erfühlt werden, ob der Graph der Funktion an jeder Stelle des angegebenen Definitionsbereiches stetig ist. Er kann gewissermaßen mit der Fingerspitze ohne Anheben des Fingers durchgängig abgefahren werden. Dies ist eine erste präformale Fassung des Begriffs der Stetigkeit.

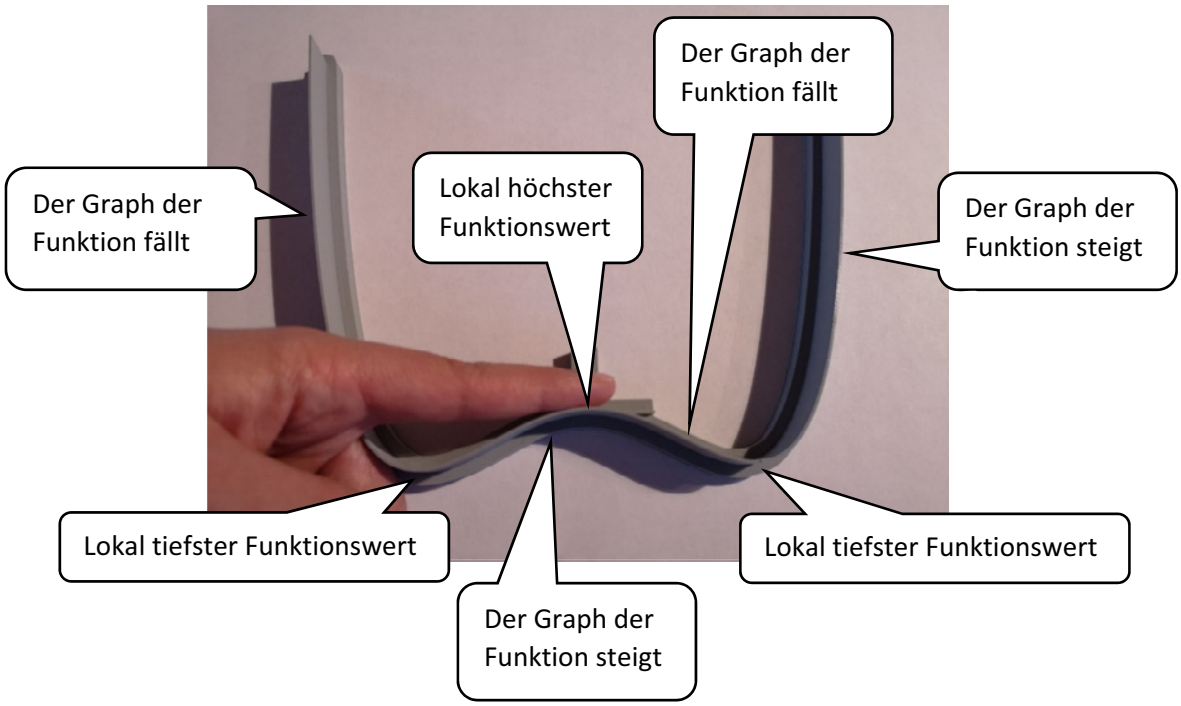
b) Mit dem ausgestreckten Finger wird nun seitlich entlang des 3D-gedruckten Graph einer Funktion gefahren. Dabei kann nachempfunden werden, ob der 3D-gedruckte Graph einer Funktion an einer Stelle ansteigt oder fällt. Der Finger wird dadurch gewissermaßen zu einer Tangente, die an den 3D-gedruckten Graph einer Funktion angelegt wird. Auch Hoch-, Tief- oder Wendepunkte werden durch diese Handlung fühlbar bzw. dadurch erfahrbar. Mithilfe dieser Handlung kann die Differenzierbarkeit eines 3D-gedruckten Graph einer Funktion als Stelle der Kurve, an der der Finger eindeutig angelegt werden kann, präformal gefasst werden.



Der der Graph der Funktion $f(x) = |x|$, ist an der Stelle $x_0 = (0, 0)$ („Spitze“) nicht differenzierbar und eine Tangente an dieser Stelle damit nicht bestimmbar. Bei dem dazugehörigen 3D-gedrucken Graph einer Funktion, kann der Finger gewissermaßen an dieser Stelle x_0 („Spitze“) in jegliche Richtung angelegt werden. Die Funktion ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.

c) Wir beschreiben den Verlauf der Steigung, sowie die lokal höchsten und tiefsten Funktionswerte am Objekt selbst.

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht



An den lokal höchsten Funktionswerten wechselt die Steigung von positiv auf negativ und ist im Extremwert selbst gleich Null. Entsprechend wechselt an den lokal tiefsten Funktionswerten die Steigung von negativ auf positiv und ist im Extremwert selbst gleich Null.

d) Die von uns erstellten 3D-gedruckten Graphen der Funktionen (siehe Lösung zu KV 3.5.3.2) sind beide achsensymmetrisch, ähnlich wie auch der in der Aufgabe vorgeschlagene Graph der Funktion. Hier gilt, dass die 3D-gedruckten Graphen einer Funktion achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse sind, da $f(x) = f(-x)$ für alle x-Werte des Definitionsbereiches (der 3D-gedruckten Graphen der Funktionen) gilt. Dies lässt sich leicht durch ein Wenden des 3D-gedruckten Modells erkennen.

2. a) Ja, beide unserer 3D-gedruckten Graphen zu den Funktionen können im Sinne der Beschreibung der Aufgabe *„Eine Funktion, deren Graph man wie im linken Bild ohne die Fingerspitze anzuheben in einem abfahren kann, nennt man stetig“* als stetig bezeichnet werden.

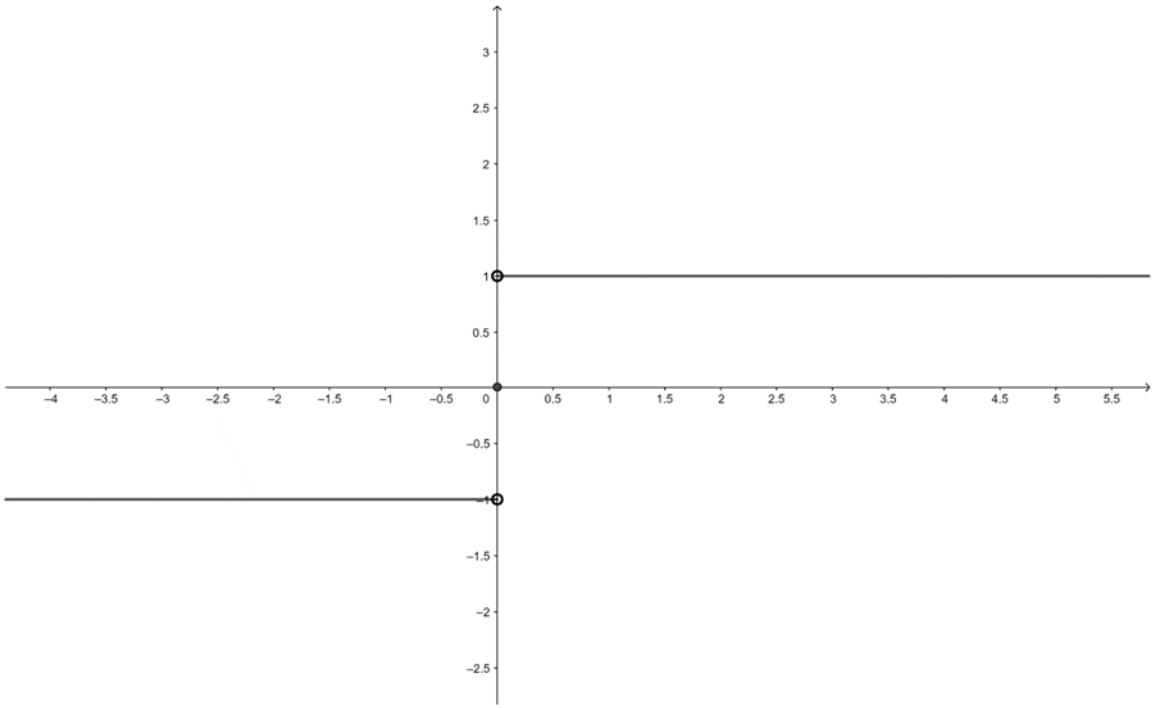
Bemerkung:
Die Funktion $f(x) = 2x^2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$ ist stetig.

Die Betragsfunktion $|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ ist stetig.

b) Die Funktion $g(x) = \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, aber an der Stelle 0 eben nicht stetig. Das kann formal durch eine Nullfolge negativer reeller Zahlen und eine Nullfolge

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

positiver reeller Zahlen nachgewiesen werden. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte konvergiert beide Male nicht gegen den Wert 0 (sondern gegen -1 bzw. 1). Betrachtet man die untenstehende Zeichnung des Graphen der Funktion g, so erkennt man, dass dieser bei $x = 0$ einen Sprung macht.



3. a) Bei unserem 3D-gedruckten Graphen der Funktion $f_1(x) = 2x^2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$ (vgl. KV 3.5.3.2), kann an jeder Stelle eindeutig an den Graphen gehalten werden, wodurch sich die Steigung eindeutig bestimmen lässt. Damit gehen wir für $f_1(x)$ von differenzierbar aus.

Bei dem Graphen unserer Betragsfunktion $|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ können wir genau an der Spitze $x_0 = (0, 0)$ (da wo sich der kleine L-Körper als Ursprung bzw. als Orientierung der Achsen befindet), den Finger nicht eindeutig an den Graphen halten, wodurch eine Bestimmung der Steigung in diesem Sinne nicht möglich wird und der Graph der Funktion damit an dieser Stelle x_0 („Spitze“) nicht differenzierbar ist.

b) Betragsfunktion $|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$

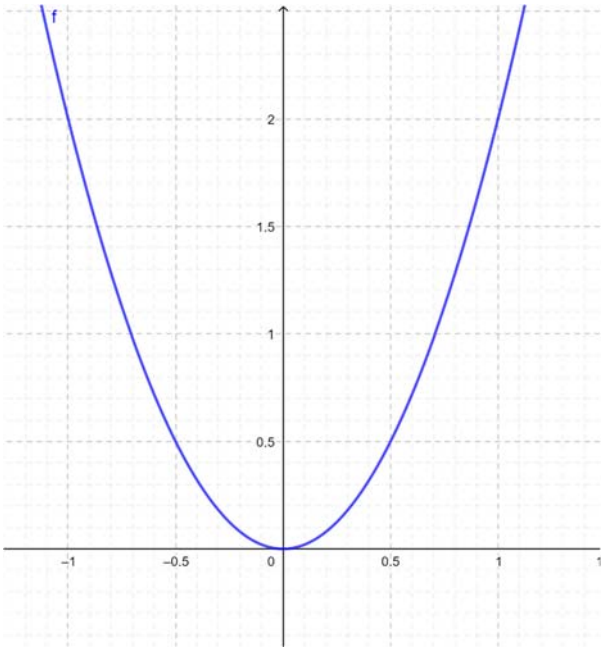
c) An der Betragsfunktion können wir feststellen, dass wir den 3D-gedruckten Graphen mithilfe der Fingerspitze abfahren können, jedoch an der Stelle x_0 („Spitze“) unseren Finger nicht eindeutig an den Graphen (gewissermaßen wie eine Tangente) halten können. Damit muss nicht jede stetige Funktion auch an allen Stellen differenzierbar sein. Umgekehrt gilt aber, können wir unseren Finger eindeutig an den Graphen anlegen, spricht ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist f auch an dieser Stelle stetig.

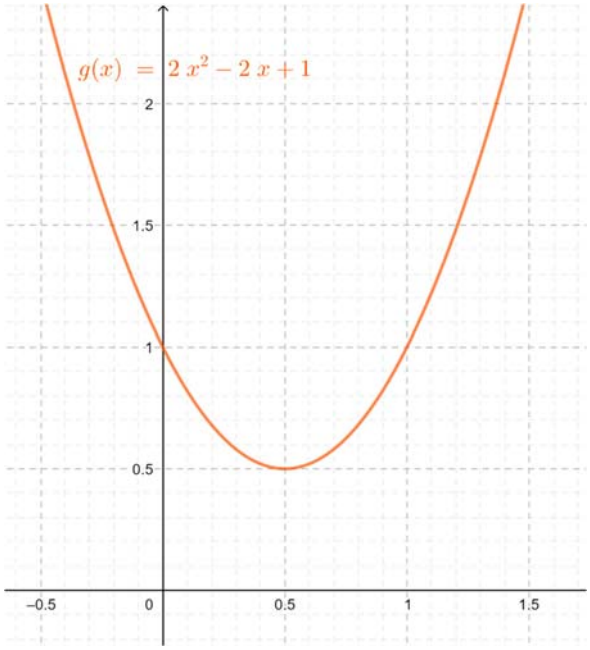
© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.3.4: **Graphen stempeln – Steigungen untersuchen**

1. Beispielhaft für den von uns entwickelten Funktionsgraphen (vgl. KV 3.5.3.2):

$f(x) = 2x^2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$



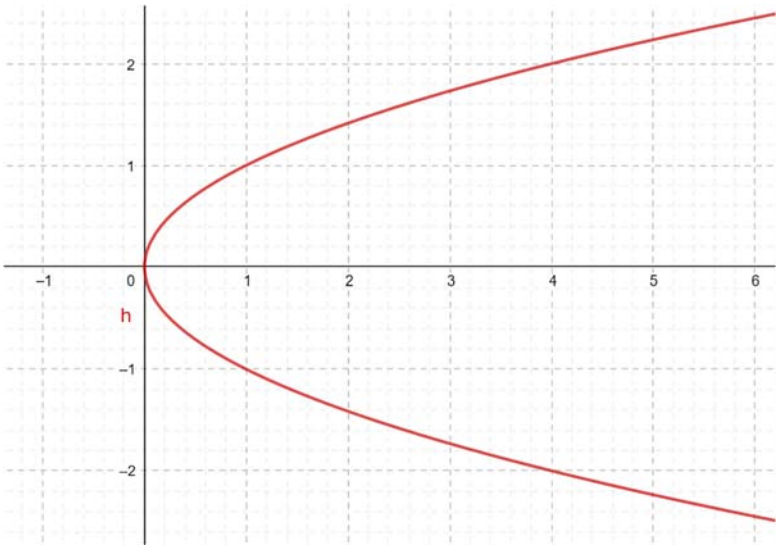


a) $f(x) = 2x^2$

b) Der Scheitelpunkt der Parabel ist im Vergleich zur Ausgangsfunktion nach rechts verschoben. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt nun im Punkt $(0|1)$. Der Term hat sich insofern geändert, als das der Term $-2x + 1$ der Funktionsgleichung $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$ hinzugekommen ist. Man könnte $g(x)$ auch zusätzlich als $2(x - \frac{1}{2})2 + \frac{1}{2}$ darstellen. Dann sieht man direkt, dass die Parabel um $\frac{1}{2}$ nach rechts und um $\frac{1}{2}$ nach oben verschoben wurde. Die Steigung des Graphen der Funktion ist gleichgeblieben (bis auf Verschiebung der zugehörigen Werte in x-Richtung).

c) Unsere entstandene Kurve ist nun keine eindeutig bestimmbare Funktion mehr (einem Funktionswert x werden nun zwei y-Werte zugeordnet). Die Kurve ist beschreibbar, als aus zwei Strängen zweier Wurzelfunktionen bestehend.

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ f\ddot{u}r\ x \geq 0 \\ -\sqrt{x}\ f\ddot{u}r\ x \geq 0 \end{cases}$$



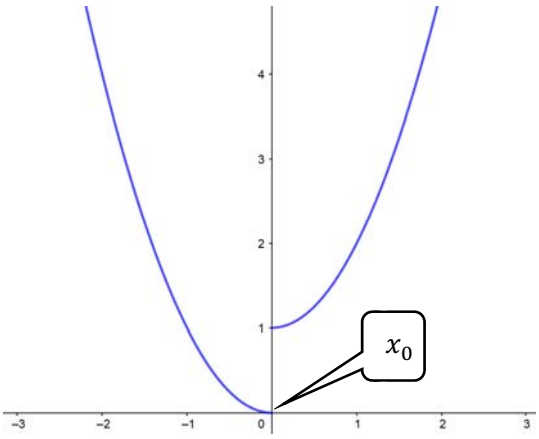
© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

Zu KV 3.5.3.5: **Wissen anwenden und vertiefen**

1. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$, stetig und differenzierbar.

b) $f(x) = 2|x|$, stetig aber nicht differenzierbar in $S(0,0)$.

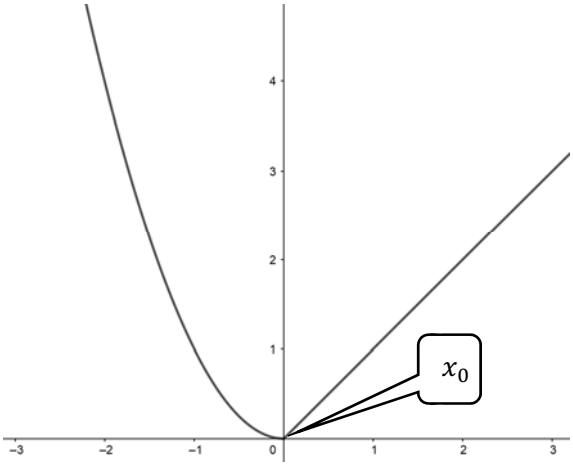
c)



Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert in x_0 ist nicht gleich, daher kann die Funktion bei $x = x_0$ nicht stetig fortgesetzt werden. Es entsteht ein Sprung. Die Funktion ist ebenfalls nicht differenzierbar in x_0.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & f\ddot{u}r\ x \geq 0 \\ x^2 & f\ddot{u}r\ x < 0 \end{cases}$$

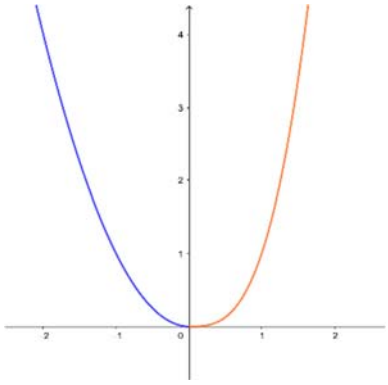
d)



$f(x) = \begin{cases} x^2 & f\ddot{u}r\ x < 0 \\ x & f\ddot{u}r\ x \geq 0 \end{cases}$ ist stetig, aber an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

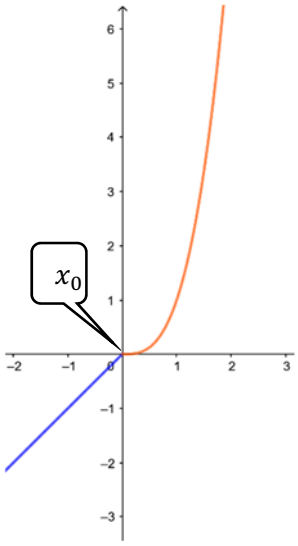
© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht

2. a)



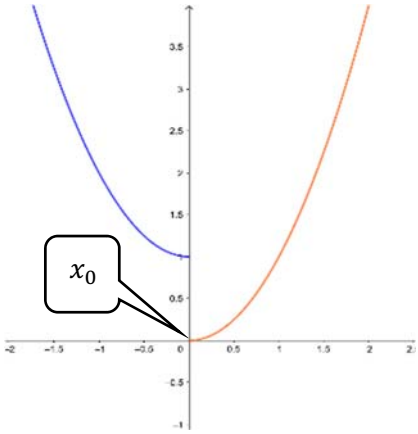
$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x < 0 \\ x^3 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$ ist stetig und differenzierbar.

b)



$g(x) = \begin{cases} x \text{ für } x < 0 \\ x^3 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$ ist stetig, aber an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

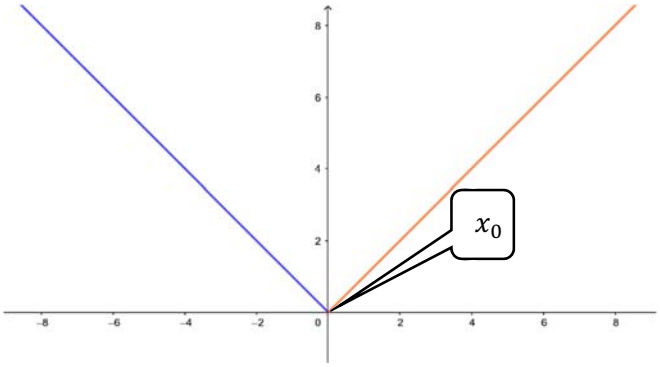
c)



$h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ für } x < 0 \\ x^2 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$

Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert in x_0 ist nicht gleich, daher kann die Funktion bei $x = x_0$ nicht stetig fortgesetzt werden. Es entsteht ein Sprung. Die Funktion ist ebenfalls nicht differenzierbar in x_0.

d)



$i(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} \text{ für } x < 0 \\ \sqrt{x^2} \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$

Ist stetig aber bei $x = x_0$ nicht differenzierbar.

© Waxmann Verlag, 2021, F. Dilling et al.: Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht