# Lösungshinweise

# Zu 3.4.1 Die binomischen Formeln – legen und begründen

### Zu KV 3.4.1.1 a: Warm Up

			\
(	1		
/		•	
/			/



Eine Variable ist ein Term und ein Term ist eine Variable.

Üblicherweise sind Terme keine Variablen. Terme sind syntaktische Ausdrücke. Z. B. ist 3+5 ein Term, aber keine Variable. Eine Ausnahme bildet der Term "x", der gleichzeitig eine Variable, nämlich "x" ist.

Der Term "xy" ist auch keine Variable. In einer Gleichung "z = xy", wäre z die Variable, und nicht "xy".



(a + 2x + 3m) ist ein Term.

Nein, das ist kein Term. Es fehlt eine Klammer am Ende des Ausdrucks:

(a + 2x + 3m)

Oder: Es handelt sich um einen syntaktisch nicht korrekt gebildeten Ausdruck, da die Klammer am Anfang fehl am Platz ist.



In einem Term können Zahlen und Variablen vorkommen.

Richtig. Aber z.B. auch Konstanten und Operationszeichen.



 $x^2 + x$  ist eine Summe und x(x + 1) ist ein Produkt.

Das eine ist die Summenform, das andere die Produktform.

Gewisse Terme können als Summe und als Produkt dargestellt werden (etwa die binomischen Terme). Andere aber nicht (etwa "sin (x)" oder " $\int f(x) \ dx$ "). Bei der Produktform werden zwei Faktoren multipliziert und bei der Summenform sollen die einzelnen Terme addiert werden. Dabei kann die Summenform aus der Produktform erhalten werden und umgekehrt.



Es gilt: a + b = 2a - (a - b)

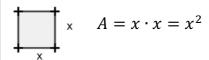
Begründung: 2a - (a - b) = 2a - a + b = a + b.

Es besteht eine Gleichheit, damit ist die Aussage richtig.



Den Flächeninhalt eines Quadrats berechne ich, indem ich zwei Seitenlängen multipliziere.

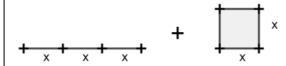
Ja, auf diese Weise kann der Flächeninhalt eines Quadrats berechnet werden, z.B. hier:





Wie kann das zusammengehören? Das sind doch unterschiedliche Dimensionen.

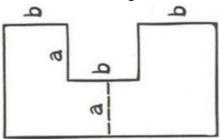
$$3x + x^2 = ?$$



Diese Problematik wurde bereits auch in der Geschichte kontrovers diskutiert. Es muss erklärt werden, wie man Längen mit Flächeninhalten addieren kann. Das kann man jedoch nicht. Im Term  $3x + x^2$  werden Variablen addiert, in die man Zahlen einsetzen kann, die man dann addieren kann.



Gesucht: Der Umfang der Figur kann mit 2b + a beschrieben werden und der Flächeninhalt der Figur mit dem Term  $2b^2 + a^2$ .

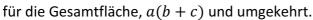


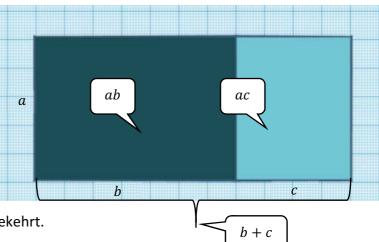
Das ist nicht korrekt. Der Umfang der Figur wird mithilfe U=6(b+a) beschrieben. Der Flächeninhalt der Figur mithilfe  $A=3b\cdot 2a-ab=5ab$ .

### Zu KV 3.4.1.1 b: Warm Up

**2.** Beispielhaft für Aufgabe a):

Der Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks kann sowohl durch den Term  $A_1=ab+ac$  beschrieben werden als auch durch den Term  $A_2=a(b+c)$  beschrieben werden. Dabei ist die Summe der Terme für die Einzelflächen ab und ac gleich dem Term





Damit wird die Verwendung des Distributivgesetzes durch die Umwandlung einer Summe in ein Produkt (Ausklammern) deutlich.

### Zu KV 3.4.1.1 c: Warm Up

**3.** a)

1 
$$2a \cdot b - a \cdot (b - c) \rightarrow \text{falsch}$$

2 
$$2a \cdot (b-c) + a \cdot c \rightarrow \text{richtig}$$

3 
$$a \cdot b + a \cdot (b - c) \rightarrow \text{richtig}$$

4 
$$a \cdot (b-c) + 2a \cdot c \rightarrow falsch$$

**5** 
$$2a \cdot b - a \cdot c \rightarrow \text{richtig}$$

b) Die Terme sind äquivalent, d.h. sie lassen sich durch Termumformungen ineinander überführen. Beispielhaft wird dies an den Termen aus Aufgabe 3 gezeigt:

### Terme 2 und 3

$$2a \cdot (b - c) + a \cdot c = a \cdot b + a \cdot (b - c)$$

$$\Leftrightarrow 2ab - 2ac + ac = ab + ab - ac$$

$$\Leftrightarrow 2ab - ac = 2ab - ac \mid + ac$$

$$\Leftrightarrow 2ab = 2ab$$

### Terme 2 und 5

$$2a \cdot (b-c) + a \cdot c = 2a \cdot b - a \cdot c$$
  
 $\Leftrightarrow 2ab - 2ac + ac = 2ab - ac$   
 $\Leftrightarrow 2ab - ac = 2ab - ac | + ac$   
 $\Leftrightarrow 2ab = 2ab$ 

#### Terme 3 und 5

$$a \cdot b + a \cdot (b - c) = 2a \cdot b - a \cdot c$$
  
 $\Leftrightarrow ab + ab - ac = 2ab - ac \mid + ac$   
 $\Leftrightarrow ab + ab = 2ab$   
 $\Leftrightarrow 2ab = 2ab$ 

c) Zum Beispiel:  $2a \cdot 2b - (2b + c) \cdot a$ 

**Anmerkung:** Es hätten auch beide Seiten ausmultipliziert und vereinfacht werden können, sodass sich jeweils 2ab - ac ergibt.

### Zu KV 3.4.1.2 a: Puzzelst du gern? Puzzles zu binomischen Formeln



a) 3. binomische Formel:  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ 

**Bild A:** Zu sehen ist ein quadratisches Puzzleteil mit der Seitenlänge a. Das Puzzleteil nennen wir  $a^2$ .

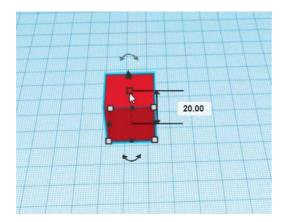
**Bild B:** Zu sehen ist nun, wie aus dem quadratischen Puzzleteil mit der Seitenlänge a ein quadratisches Stück mit der Seitenlänge b herausgeschnitten wurde. Dieses herausgeschnittene Stück nennen wir  $b^2$ .

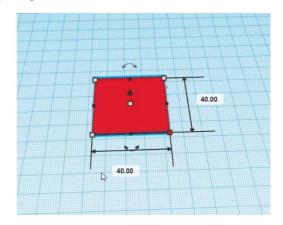
**Bild C:** Nun wird das entstandene Puzzleteil (vgl. Bild A und B), nennen wir es  $a^2-b^2$ , entlang der kürzeren Diagonale, nennen wir diese Schnittkante  $\overline{AB}$  in zwei gleiche Puzzleteile geteilt. **Bild D:** Die beiden gleichen neu entstandenen Puzzleteile werden nun entlang der Schnittkante  $\overline{AB}$  neu zusammengelegt (indem ein Teil "umgedreht" wird), um ein neues rechteckiges Puzzleteil entstehen zu lassen. Dieses Puzzleteil hat nun, ausgehend von den Bildern A und B, die Seitenlängen (a-b) und (a+b).

Die Fläche des Puzzleteils aus Bild B ist gleich der Fläche des Puzzleteils aus Bild D. Beschreiben wir den Flächeninhalt des Puzzleteils aus Bild B mit dem Term  $a^2 - b^2$  und den Flächeninhalt des Puzzleteils aus Bild D (falls dies ein Rechteck ist) mit (a - b)(a + b), so können wir folgern:  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ .

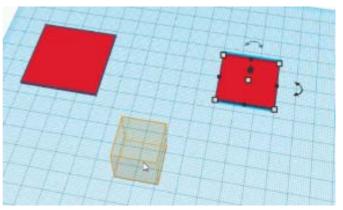
### Zu KV 3.4.1.2 b: Puzzelst du gern? Puzzles zu binomischen Formeln

b) Zunächst wird ein Quader aus der Randleiste ausgewählt und die Maße werden so eingestellt, dass ein quadratisches Prisma mit geringer Höhe entsteht.

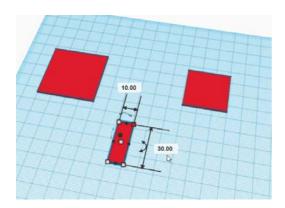


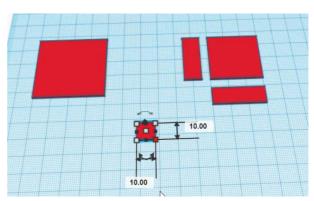


Ein weiterer Quader wird ausgewählt und auch hieraus wird ein quadratisches Prisma mit geringer Höhe erstellt, welches eine kleinere Seitenlänge als das zuvor erstellte Prisma hat. Hat also unser zunächst erstelltes quadratisches Prisma z. B. die Seitenlängen 40cm, hat das nun erstellte z. B. die Seitenlänge 30cm.

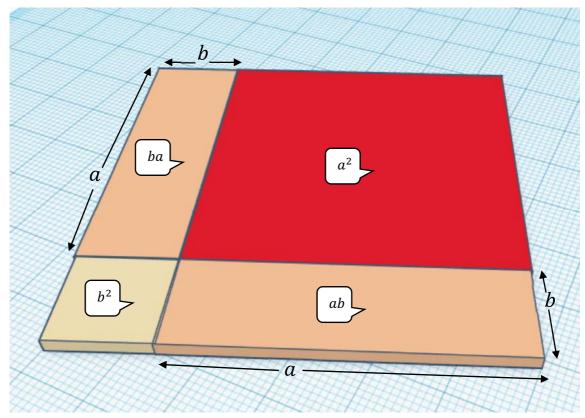


Wir wählen einen weiteren Quader und erstellen ein rechteckiges Prisma. In unserem Fall mit den Seitenlängen 10cm und 30cm. Dieses Prisma wird kopiert bzw. dupliziert. Nun fehlt noch ein letztes, quadratisches Prisma, in unserem Fall erhält es die Seitenlängen 10cm.









Das rote quadratische Puzzleteil hat die Seitenlänge a. Die beiden rechteckigen orangenen Puzzleteile haben die Seitenlängen a, b. Das quadratische gelbe Puzzleteil hat die Seitenlänge b. Das zusammengesetzte gesamte quadratische Puzzleteil hat die Seitenlänge (a + b).

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche der Puzzleteile kann einerseits durch den Term (a+b)(a+b) beschrieben werden und andererseits durch den Term  $a^2+2ab+b^2$ .

Weil die beiden Terme die gleiche Gesamtfläche beschreiben, können wir festhalten:  $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ .

### Zu KV 3.4.1.2 c: Puzzelst du gern? Puzzles zu binomischen Formeln

2. binomische Formel:  $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ 

Es handelt sich um die richtigen Puzzleteile. Dennoch ist ein Puzzeln schwierig.

Zunächst können wir den Flächeninhalt des gesamten Puzzleteils durch den Term  $a^2$  beschreiben. Die Fläche des roten Puzzleteils beschreiben wir durch den Term  $(a-b)^2$ . Die Gesamtfläche der beiden rechteckigen orangefarbenen Puzzleteile beschreiben wir durch 2ab. Und die Fläche des gelben Puzzleteils beschreiben wir durch den Term  $b^2$ . Uns geht es nun um das rote Puzzleteil. Wir beschreiben den Flächeninhalt des roten Puzzleteils mit dem Term (a-b)(a-b) und einmal durch den Term  $a^2-2ab+b^2$  für die 1. binomische Formel.

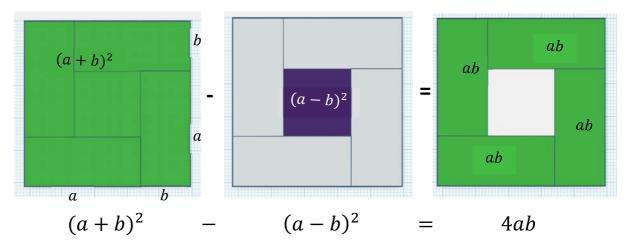
Es geht wieder um die gleiche Gesamtfläche, daher können wir folgern:

$$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Bei der 2. binomischen Formel subtrahieren wir gewissermaßen das Puzzleteil zu  $b^2$  zweimal von dem Gesamtpuzzle ab. "Da das nicht geht", fügen wir das Puzzleteil wieder einmal hinzu.

# Zu KV 3.4.1.2 d: Puzzelst du gern? Puzzles zu binomischen Formeln

(3.) Mithilfe der Puzzleteile kann folgende Begründung gefunden werden:



Es handelt sich hierbei um eine Differenz der Quadrate aus Summe und Differenz der Seiten a und b.

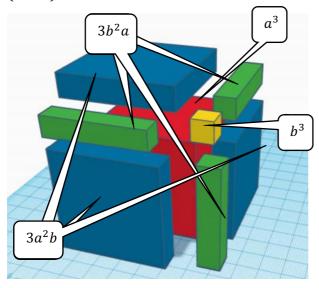
 $igg( {f q_*} igg)$  Die Puzzleteile sind  $\in \mathbb{R}^+$ , wohingegen z.B. die binomischen Formeln  $\in \mathbb{R}^+$  sind.

## Lösungshinweise

# Zu KV 3.4.1.3 a: Puzzle<sup>3</sup> – Geht das?

a)—b) In diesem Fall betrachten wir nicht den Flächeninhalt, sondern das Volumen der Puzzleteile.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$



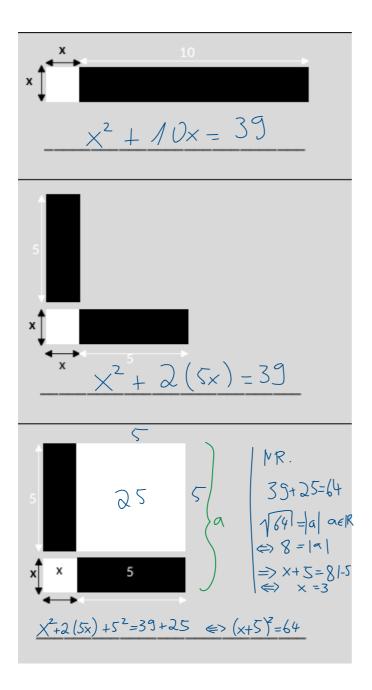
## Zu KV 3.4.1.3 b: Puzzle3 – Geht das?

- c) Vergleiche Lösung zu Aufgabe 1 b).
- **2.** Die Formel aus Aufgabe 1 a) gilt für  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

## Zu KV 3.4.1.4 a: Forscheraufgaben

### Quadratische Gleichungen lösen nach der Methode von AL-CHWARIZMI:

Beispiel: "Ein Quadrat der unbekannten Seitenlänge x und ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 und x haben zusammen 39 Einheiten."



### Zu KV 3.4.1.4 b: Forscheraufgaben

a) Auch in dem Schema von Al-Chwarizmi werden Flächeninhalte von Quadraten und Rechtecken betrachtet. Gleichzeitig erinnert das Schema an die Darstellung der Puzzleteile unserer 1. binomischen Formel. Wir schreiben den Term zur Beschreibung des Flächeninhaltes unserer letzten Abbildung des Schemas von Al-Chwarizmi auch folgendermaßen auf:  $(x+5)^2 = 64$ . Auch auf diese Weise erhalten wir das Ergebnis x=3. Diese Gleichung kann in Aufgabenteil c) übrigbleiben.

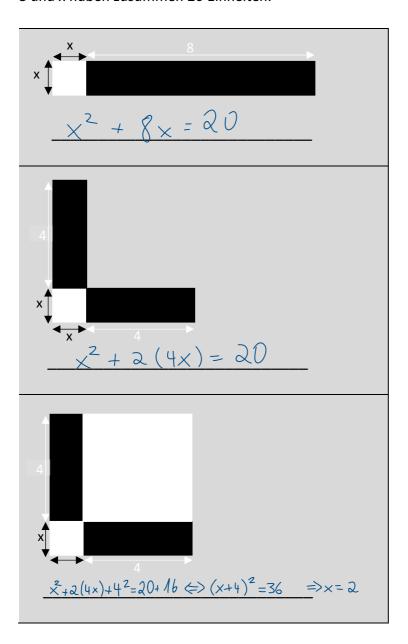
Das Schema, welches hier genutzt wird, ist die quadratische Ergänzung.

Die Flächeninhalte beschreiben wir mithilfe von Termen. Dadurch werden Ähnlichkeiten zur 1. binomischen Formel verdeutlicht (sowohl in der Darstellung mithilfe von Flächen als auch in der Darstellung mithilfe von Termen).

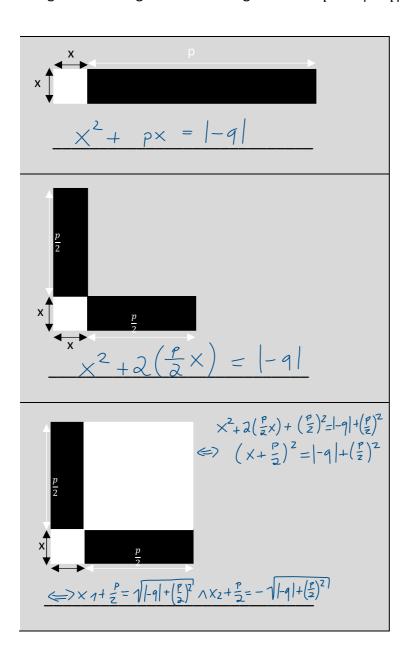
- b) x = 3
- c) Vergleiche Darstellung in KV 3.4.1.4 a. Wenn die Lösung so aussieht, wie wir den Flächeninhalt beschrieben haben, bleibt keine Gleichung übrig. Man kann mit den Schülerinnen und Schülern ansonsten auch über die Gleichung  $(x+5)^2=64$  diskutieren.

## Zu KV 3.4.1.4 c: Forscheraufgaben

d) Beispiel: "Ein Quadrat der unbekannten Seitenlänge x und ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 und x haben zusammen 20 Einheiten."



e) Zusammenhang zur quadratischen Ergänzung: Wir erläutern den Zusammenhang mithilfe unserer Darstellung, auch die Schülerinnen und Schüler könnten dies nutzen. Wir gehen von folgender Gleichung aus:  $x^2 + px = |-q|$ .

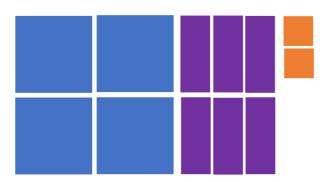


# Zu 3.4.2 Lineare und quadratische Gleichungen – Lösungsprozesse anschaulich gestalten mit Algebra-Plättchen

Zu KV 3.4.2.1: Warm Up – Algebra, die Sprache der Mathematik

1.	Plättchenart	Symbol	Erklärung
		1 und -1	Quadratisches Plättchen mit den Seitenlängen 1.
		x und $-x$	Rechteckiges Plättchen mit den Seitenlängen 1 und x.
		$x^2$ und $-x^2$	Quadratisches Plättchen mit den Seitenlängen x.

Zum Beispiel kann für den Term  $4x^2 + 6x + 2$  folgende Darstellung mit den 3D-gedruckten Plättchen gelegt werden:



### Zu KV 3.4.2.2: Rechengesetze mit Algebra-Plättchen darstellen und begründen

1. Eigenschaften der Addition:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
 (Assoziativgesetz)

a + b = b + a (Kommutativgesetz)

Es gibt ein Element  $0 \in K$  mit 0 + a = a (neutrales Element).

Zu jedem  $a \in K$  existiert das additive Inverse -a mit (-a) + a = 0.

Eigenschaften der Multiplikation:

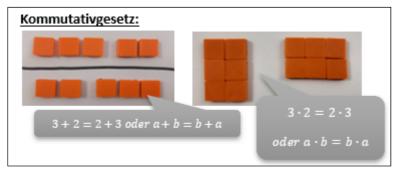
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
 (Assoziativgesetz)

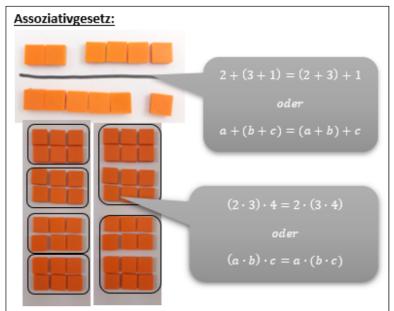
 $a \cdot b = b \cdot a$  (Kommutativgesetz)

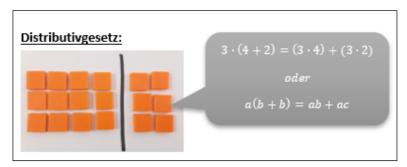
Es gibt ein Element  $1 \in K$  mit  $1 \cdot a = a$  (neutrales Element), und es ist  $1 \neq 0$ .

Zu jedem  $a \in K \setminus \{0\}$  existiert das multiplikative Inverse  $a^{-1}$  mit  $a^{-1} \cdot a = 1$ .

**3.** Beispielhafte Darstellungen mit den Einheitsquadraten könnten die Folgenden sein:



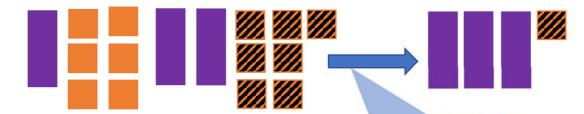




## Zu KV 3.4.2.3: Mit Termen rechnen

1. Beispielhaft für Aufgabenteil a):

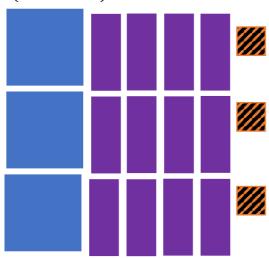
$$(x+6) + (2x-7) = 3x - 1$$



Ich vereinfach zu 3x – 1, da sich die gleiche Anzahl (hier jeweils 6) an orangefarbenen und schraffierten Einheitsplättchen ausgleicht.

**2.** Beispielhaft für Aufgabenteil b):

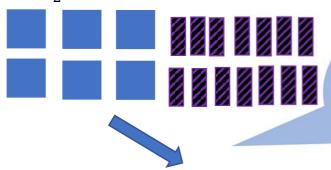
$$3(x^2 + 4x - 1) = 3x^2 + 12x - 3$$





ig( 3. ig) Beispielhaft für Aufgabenteil c):

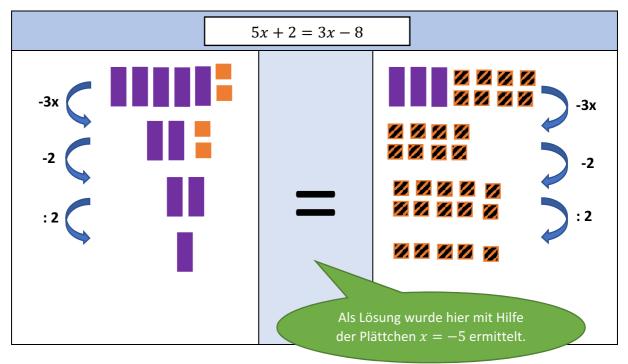
$$\frac{6x^2 - 14x}{-2} = -3x^2 + 7x$$



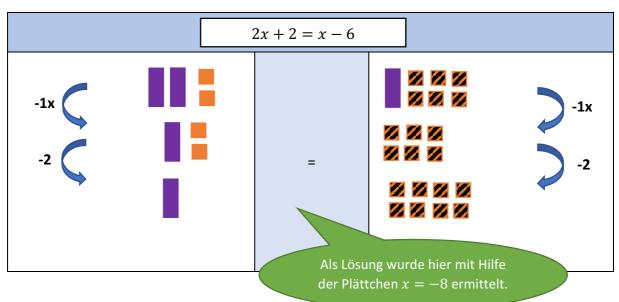
Ich lege zunächst  $6x^2-14x$ . Um diese Anzahl an Plättchen durch (-2) zu teilen, teile ich zunächst durch 2 und wende abschließend die Plättchen, was der Operation  $multiplizieren\ mit\ (-1)$  entspricht.

## Zu KV 3.4.2.4 a: Lineare Gleichungen lösen

**1.** Beispielhaft für eine der Gleichungen:

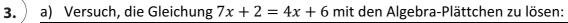


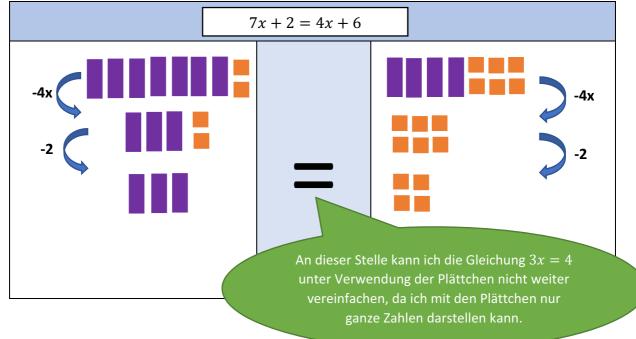
(2.) a) Beispielhaft für eine der Gleichungen:



b) 
$$2x + 2 = x - 6 \quad |-1x|$$
  
 $x + 2 = -6 \quad |-2|$   
 $x = -8$ 

Probe: 
$$2 \cdot (-8) + 2 = (-8) - 6$$
  $(-16) + 2 = -14$   $-14 = -14$ 





Die Lösung der Gleichung lautet  $x=\frac{4}{3}$ . Für die Darstellung rationaler Zahlen besitzen wir keine Algebra-Plättchen, sodass wir bei dieser Aufgabe nicht direkt zu einer Lösung kommen.

b) Mit den Algebra-Plättchen lässt sich die Gleichung 2x=3 nicht vollständig lösen, denn die Lösung dieser Gleichung lautet  $x=\frac{3}{2}$ . Hierfür besitzen wir kein Plättchen. Es können also mit den Plättchen nur lineare Gleichungen mit einer ganzzahligen Lösung direkt gelöst werden.

c) 
$$7x + 2 = 4x + 6 \mid -2$$
  
 $7x = 4x + 4 \mid -4x$   
 $3x = 4 \mid :3$   
 $x = \frac{4}{3}$ 

Im letzten Schritt muss die Anzahl der Einheitsplättchen durch die Anzahl der x-Plättchen geteilt werden, um die Lösung als Bruchzahl angeben zu können.

## Zu KV 3.4.2.5 a: Summen- und Produktform von Termen

- 1. a)-b) Produktform: (x+3)(x+1), Summenform:  $x^2+4x+31$ .
  - c) Terme können in Produktform und in Summenform dargestellt werden. Bei der Produktform werden zwei Faktoren multipliziert und bei der Summenform sollen die einzelnen Terme addiert werden. Dabei kann die Summenform in die Produktform überführt werden und umgekehrt. (Anmerkung: Unter Umständen gilt das nicht immer, zumindest nicht immer mit ganzzahligen Lösungen.)

2.

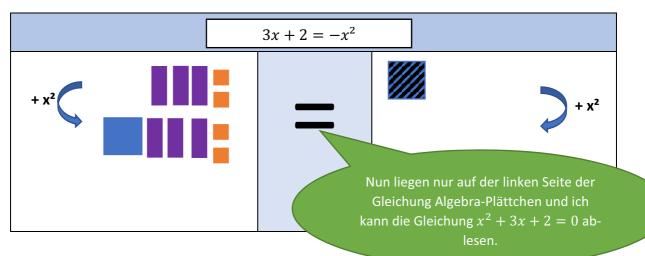
Plättchen	Summenform	Produktform
	$2x^2 + 3x$	$(x)\cdot(2x+3)$
	$x^2 + 3x + 2$	$(x+1)\cdot(x+2)$
-	$2x^2 + 3x + 1$	$(x+1)\cdot(2x+1)$
	$x^2 + 4x$	$(x)\cdot(x+4)$
	$4x^2 + 6x + 2$	$(2x+1)\cdot(2x+2)$
	$2x^2 + 5x + 2$	$(2x+1)\cdot(x+2)$
	$x^2 + 8x + 15$	$(x+3)\cdot(x+5)$

Beim Faktorisieren durch Ausklammern werden die Elemente des Terms auf einen gemeinsamen Faktor hin untersucht. Ist dieser Faktor ermittelt, kann man ihn mithilfe des Distributivgesetzes vor oder hinter den restlichen Term ziehen (auch ausklammern genannt).

### Zu KV 3.4.2.6: Quadratische Gleichungen lösen

(1.)

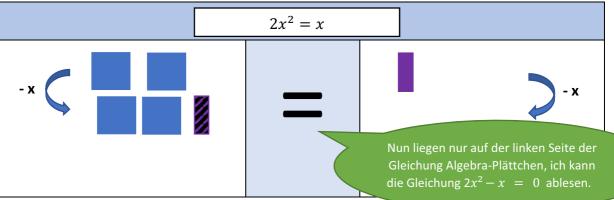
Beispielhafte Darstellung für eine der Gleichungen:



- **2.** Werte für x bestimmen, beispielhaft an der Gleichung aus Aufgabe 1:
  - a)  $x^2 + 3x + 2 = 0$ (x+1)(x+2) = 0

Für die Darstellung der Vorgehensweise mit Algebra-Plättchen sei auf KV 3.4.2.5 b verwiesen.

- b) Zwei Werte für x:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$
- c) Bei der Form  $x\cdot(x+a)=0$  erhält man  $x_1=0, x_2=-a$ . Bei der Form  $(x+b)\cdot(x+c)=0$  erhält man  $x_1=-b, x_2=-c$ .
- (3.) a) Versuch, die Gleichung  $2x^2=x$  mit Algebra-Plättchen zu lösen:



Beim weiteren Lösen dieser Gleichung ergibt sich hier die Schwierigkeit, dass sich die erhaltenen Plättchen nicht ohne Weiteres zu einem Quadrat, aus welchem die Produktform abgelesen werden kann, ergänzen lassen.

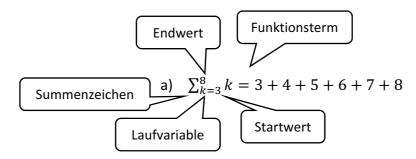
- b) Quadratische Gleichungen, die nach Vereinfachung auf einer Seite sowohl positiv gewertete als auch negativ gewertete Plättchen besitzen, können nicht ohne Weiteres gelöst werden. Ebenso solche Gleichungen, die nicht ausschließlich ganzzahlige Lösungen besitzen.
- c) Beispielhaft für die Gleichung aus Aufgabenteil a):

Eine Darstellung mit Algebra-Plättchen kann in diesem Fall nicht ohne Weiteres erfolgen.

## Zu 3.4.3 Summenformeln – Muster erkennen, fortführen und begründen

## Zu KV 3.4.3.1: Warm Up - Die Summenschreibweise kennenlernen

1. Beispielshaft für die a) mit Beschriftung:



b) 
$$\sum_{k=0}^{10} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

c) 
$$\sum_{a=1}^{3} a = 1 + 2 + 3$$

d) 
$$\sum_{k=-3}^{3} k^3 = (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3$$

e) 
$$\sum_{k=1}^{8} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

f) 
$$\sum_{k=1}^{8} a = a + a + a + a + a + a + a + a = 8a$$

Hinweis zu e) und f): Dies sind in gewisser Hinsicht "künstliche" Beispiele, da die "1" bzw. das "a" als konstante Funktionen aufgefasst werden müssen, deren Definitionsbereich die ganzen Zahlen sind.

(2.) a) 
$$4+5+6+7+8=\sum_{k=4}^{8}k$$

b) 
$$0+2+4+6+8 = \sum_{k=0}^{4} 2k$$

c) 
$$0+2+4+6+8+\cdots+2n = \sum_{k=0}^{n} 2k$$

d) 
$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

e) 
$$13 + 13 + 13 + 13 + 13 = \sum_{k=1}^{5} 13$$

f) 
$$1 + 8 + 27 + 64 = \sum_{k=1}^{4} k^3$$

### Zu KV 3.4.3.2: Die Gaußsche Summenformel

1. 
$$1+2+3+\cdots+100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10000+100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

2. a) 
$$\sum_{k=1}^{1000} k = 1 + 2 + \dots + 1000 = \frac{1000(1000+1)}{2} = 500500$$

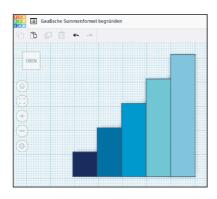
b) Wir zerlegen z. B. in Teilsummen und subtrahieren:

$$\sum_{k=51}^{100} k = 51 + 52 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{50} k = \frac{100(100+1)}{2} - \frac{50(50+1)}{2}$$

$$=5050 - \frac{2500 + 50}{2} = 5050 - 1275 = 3775$$

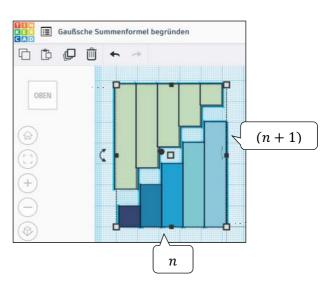
### Zu KV 3.4.3.3: Die Gaußsche Summenformel begründen

Wir legen das Material für die Fälle n=1, n=2, n=3, n=4 und n=5 zusammen. Dadurch stellen wir die Summe der ersten natürlichen Zahlen  $\{1,2,3,4,5\}$  als Treppe mit 5 Stufen dar. Zwei solcher Treppen können zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 5 und 5+1 zusammengefügt werden. Zusammen bilden sie dann also  $5 \cdot (5+1)$  Einheitsquadrate. Eine einzelne Treppe besteht entsprechend aus halb so vielen Einheitsquadraten  $\Rightarrow \frac{5 \cdot (5+1)}{2}$ , für unseren Fall n=5.





Ahnlich können wir zur Begründung der Gaußschen Summenformel für n-Fälle vorgehen. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen wird als Treppe mit n Stufen dargestellt. Zwei solcher Treppen können zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und n+1 zusammengefügt werden, zusammen bilden sie also  $n\cdot(n+1)$  Einheitsquadrate. Eine einzelne Treppe besteht entsprechend aus halb so vielen Einheitsquadraten. Man erhält auf diese Art und Weise die obige Formel.



# 3. <u>Summe der ersten n Zahlen</u>

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen wird auch Gaußsche Summenformel genannt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sie lässt sich mit vollständiger Induktion wie folgt beweisen:

### Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Mit den Plättchen kann der Fall n=1 ebenfalls untersucht und begründet werden.

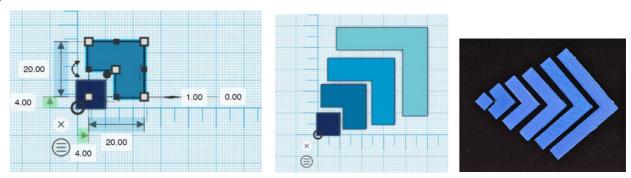
Induktionsschritt: Wenn die Aussage für ein beliebiges natürliches n gilt (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV), dann auch für die darauffolgende Zahl n+1.

$$+\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Mit den Plättchen kann dies begründet werden, indem man sich vorstellt, dass man zwei Treppen mit n Stufen zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und n+1 zusammenlegen kann. Betrachtet man dagegen Treppen mit n+1 Stufen, so kommen zwei Plättchen mit den Seitenlängen n und n+1 hinzu. Diese ergänzen das zusammengefügte Rechteck mit den Seitenlängen n und n+1 zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n+1 und n+2.

## Zu KV 3.4.3.4 a: Die ersten n ungeraden Zahlen

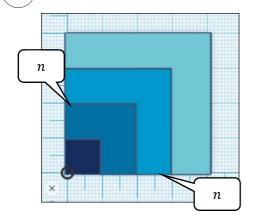
**1.** Materialerstellung zur Begründung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen in Tinkercad™:



Mögliche Beschreibung des Vorgehens: Es wird ein Quader aus der Randleiste gewählt und die Maße werden entsprechend angepasst (hier: Höhe 1mm). Anschließend werden die verschiedenen Plättchen (für  $n=1, n=2, n=3, \dots$ ) schrittweise konstruiert. Das Lineal hilft zur Kontrolle der Maße.

### Zu KV 3.4.3.4 b: Die ersten n ungeraden Zahlen

**2.** Begründung mithilfe des Materials (hier eine beispielhafte Darstellung mit Tinkercad™):



Wir beginnen mit der Zahl 1 als erste ungerade Zahl (erstes Einheitsquadrat). Dann setzen wir an zwei benachbarte Seiten Einheitsquadrate an. Nun fehlt ein weiteres Einheitsquadrat, um ein Quadrat der Seitenlänge 2 zu bilden. Es ergibt sich  $1+3=2^2$  (Induktionsanfang). Dieses Muster kann entsprechend mit den folgenden ungeraden Zahlen fortgeführt werden. Um aus einem Quadrat der Seitenlänge n ein Quadrat der Seitenlänge n+1 zu formen, benötigt man immer zwei Mal n Einheitsquadrate sowie ein weiteres Einheitsquadrat — dies entspricht dem Term 2n+1 (Induktionsschluss). Es handelt sich um die n-te natürliche ungerade Zahl.

# ( 3. ) <u>Summe der ersten n ungeraden Zahlen</u>

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen wird in der Unterrichtseinheit ebenfalls behandelt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

Sie kann mit vollständiger Induktion folgendermaßen bewiesen werden:

### Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2$$

**Induktionsschritt:** Wenn die Aussage für ein beliebiges natürliches n gilt (*Induktionsvoraussetzung*, *kurz: IV*), dann auch für die darauffolgende Zahl n+1 (*Induktionsfolgerung*).

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2n+1) \stackrel{IV}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$