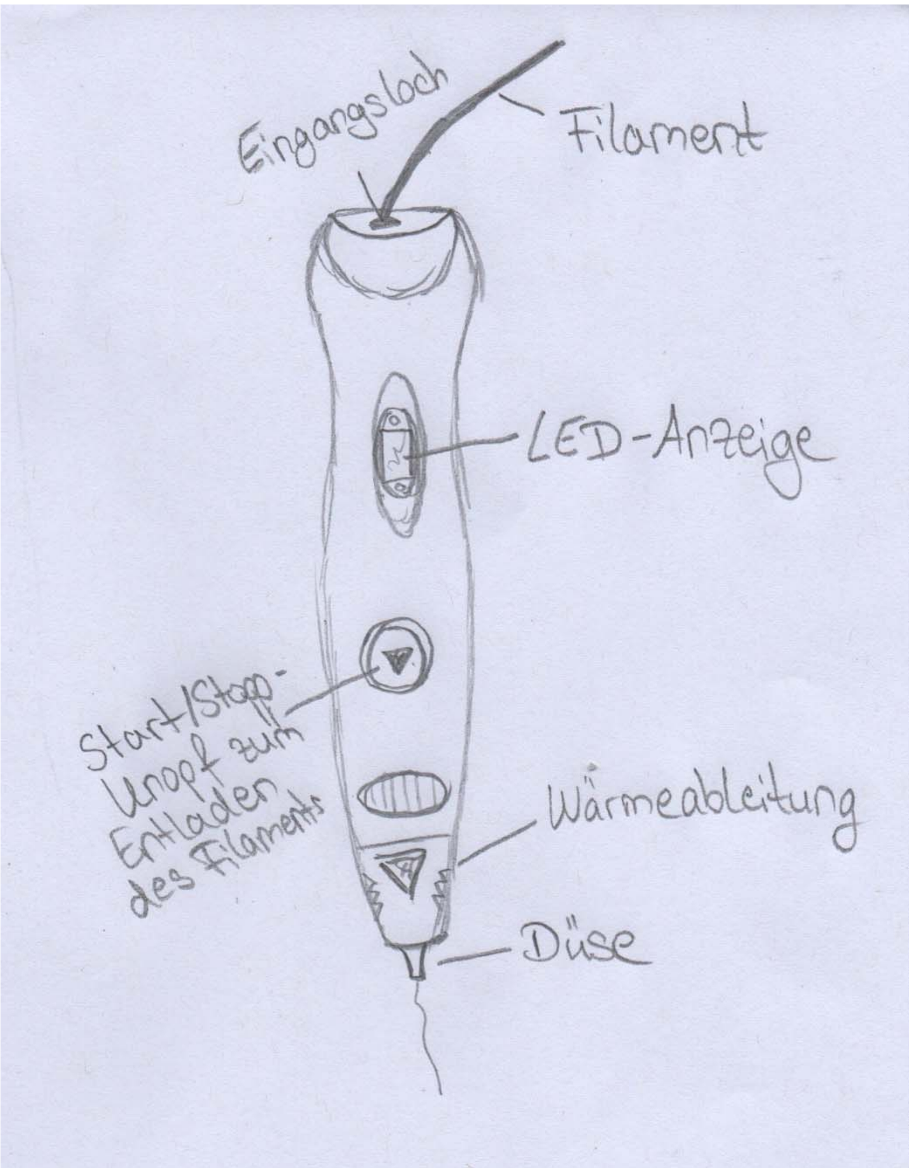
Lösungshinweise

Zu 3.1 Mathematikunterricht mit dem 3D-Druck-Stift für verschiedene Schulstufen

Zu KV 3.1.1: **Warm Up – Aufbau und Funktionsweise des 3D-Druck-Stiftes**

1. Beschrifte die Abbildung des 3D-Druck-Stiftes



2. Fülle den Lückentext zu den **Sicherheitshinweisen** zum Umgang mit dem 3D-Druck-Stift aus.

1. *Die Düse des Stiftes erreicht eine Temperatur von über 200 °C. Berühre diese nicht während des Gebrauchs, damit du dich nicht verbrennst.*
2. *Berühre mit dem Stift keine andere Person oder hitzeempfindlichen Gegenstände.*
3. *Stelle den Stift mit der Spitze in die Stifthalterung, wenn du ihn gerade nicht benötigst.*
4. *Achte darauf, dass das Stromkabel niemandem den Weg versperrt.*

I. Unterrichtsvorschlag „Kantenmodelle mal anders“

Zu KV 3.1.2: **Kantenmodelle erstellen**

1. Die Schülerinnen und Schüler füllen die Tabelle entsprechend ihres Vorwissens zu geometrischen Körpern aus. Sie benennen den jeweiligen geometrischen Körper, zählen Eigenschaften wie die Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Form der Seitenflächen auf, skizzieren den beschriebenen Körper (als Schrägbild) und nennen Alltagsgegenstände, in welchen sie den jeweiligen Körper wiedererkennen.

2. Hier können die Schülerinnen und Schüler ihre **Definition eines Kantenmodells** notieren. Diese Definition kann im Verlauf des Unterrichtsvorhabens noch weiter ausdifferenziert werden. Zum Beispiel:

3. *Ein Kantenmodell ist ein Prototyp bzw. Modell eines Körpers, bei welchem nur die Kanten des Körpers dargestellt werden. Bei einem Kantenmodell hat man einen guten Einblick in das Innere des Körpers, da die Seitenflächen nicht ausgefüllt sind.*

4. a)–c) Die Schülerinnen und Schüler zeichnen hier zunächst ohne weitere Vorgaben mit dem 3D-Druck-Stift ein Kantenmodell eines geometrischen Körpers. Danach sollen sie ihren 3D-gezeichneten Körper skizzieren und beschreiben, wie sie bei der Erstellung vorgegangen sind. Dies bietet eine gute Grundlage für den Austausch verschiedener *Tipps und Tricks* zur Erstellung von Kantenmodellen, wie das Zeichnen von geraden Kanten entlang eines Lineals oder das Anfertigen einer Zeichenvorlage bzw. -schablone für die Grund- und Seitenflächen. Als nächstes stellen die Schülerinnen und Schüler sich ihre Körper gegenseitig vor und identifizieren, um welchen Körper es sich handelt.

5. a)–b) Nun ordnen sie die Modelle in *Klassen*, hier bieten Ordnungskriterien, wie Körperform, Form der Grundfläche oder Größe weitere Interaktionsanlässe. Die mathematische Bedeutung des Begriffs „Klasse“ kann so ausgehandelt werden. Zudem kann das Arbeitsergebnis z.B. in Form einer Fotocollage festgehalten werden. Um den Begriff „Klasse“ zu festigen, sollen die Schülerinnen und Schüler ein Modell, welches einer bestimmten Klasse entspricht, anfertigen und anschließend begründet einordnen.

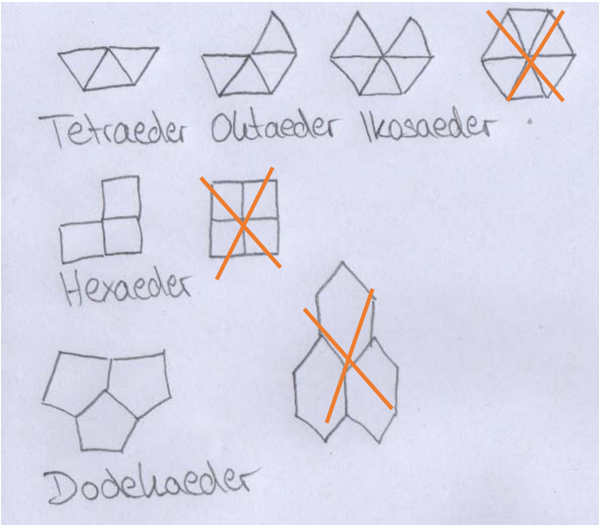
Zu KV 3.1.3: **Forscheraufträge zu Platonischen Körper**

1. In dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig zu den Platonischen Körpern recherchieren, diese aufzählen und beschreiben. Es gibt genau fünf Platonische Körper: *Tetraeder, Hexaeder*, *Oktaeder, Dodekaeder* und *Ikosaeder.* Platonische Körper sind konvexe Körper, welche aus zueinander kongruenten, regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind. Eine weitere charakterisierende Eigenschaft ist, dass in jeder Ecke des Körpers gleich viele und gleichlange Kanten zusammenlaufen, wobei sich an jeder Kante deckungsgleiche Flächen treffen und jede Fläche gleich viele Ecken hat.

2. a)–b) Die Schülerinnen und Schüler zeichnen nun mit dem 3D-Druck-Stift das **Netz eines Platonischen Körpers** und beschreiben anschließend, wie sie vorgegangen sind. Sie können beispielsweise so vorgehen, dass sie die vorgegebenen regelmäßigen Vielecke als Vorlage nutzen und diese nachzeichnen. Wichtig ist, dass eine transparente hitzeunempfindliche Folie auf das Papier gelegt wird. Die Folie kann, nachdem die Umfangslinien der ersten Seitenfläche nachgezeichnet wurden, so verschoben werden, dass die nächste Seitenfläche direkt ergänzt werden kann.

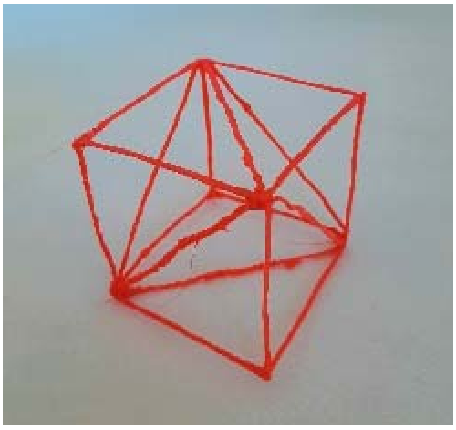
c) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Netze vergleichen und ordnen. Sie sollen alle Netze, die zum gleichen Körper gehören, zusammenlegen und erkennen, dass es zu einem Körper verschiedene Netze gibt. Daran anknüpfend könnte die Frage aufkommen, wie viel verschiedene Netze es je Körper gibt. Falls mit flexiblem Filament gearbeitet wird, können die Schülerinnen und Schüler ihre Netze durch ein Auffalten bzw. Zusammenbauen kontrollieren.

d) Bei dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst überlegen, warum es nur fünf verschiedene Platonische Körper geben kann und dies anschließend begründen. Beispielsweise können sie über geometrische Überlegungen zu den Innenwinkeln im regelmäßigen Vieleck argumentieren:



Damit eine Körperecke entstehen kann, muss die Summe der Innenwinkel aller angrenzenden Flächen kleiner als 360° sein. Außerdem müssen dazu mindestens drei Flächen aufeinandertreffen. Wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke (Innenwinkel 60°) sind, können 3, 4 oder 5 Dreiecke zusammentreffen. Wenn die Seitenflächen Quadrate (Innenwinkel 90°) oder regelmäßige Fünfecke (Innenwinkel 108°) sind, können jeweils 3 davon zusammentreffen. Treffen (wie ebenfalls in der Skizze rechts dargestellt) 6 regelmäßige Dreiecke, 4 Quadrate oder 3 Sechsecke zusammen, entsteht keine Raumecke, sondern eine (reguläre) Parkettierung der Ebene.

3. a)–b) Die Schülerinnen und Schüler zeichnen nun mit dem 3D-Druck-Stift das **Kantenmodell eines Platonischen Körpers** und beschreiben anschließend, wie sie vorgegangen sind. Sie können beispielsweise so vorgehen, dass sie regelmäßige Vielecke vorzeichnen und als Zeichenschablone nutzen.

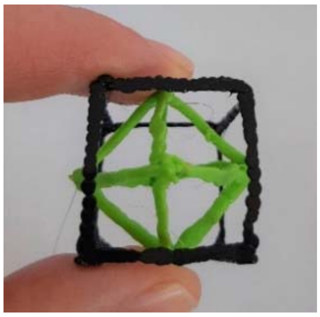


c) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler herausfinden, dass man ein Hexaeder nutzen kann, um ein Tetraeder zu erstellen. Die Diagonalen der Seitenflächen eines Hexaeders können als Kanten eines Tetraeders genutzt werden (vgl. Foto). Bei dem entstandenen Körper handelt es sich tatsächlich um einen Tetraeder, da die Diagonalen des Hexaeders alle dieselbe Länge haben, somit entstehen kongruente gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen des Tetraeders.

4. a) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der Platonischen Körper in Form einer Tabelle dokumentieren:

Körper	Anzahl Ecken	Anzahl Flächen	Anzahl Kanten
Tetraeder	4	4	6
Hexaeder	8	6	12
Oktaeder	6	8	12
Dodekaeder	20	12	30
Ikosaeder	12	20	30

Beim Betrachten der Werte in der Tabelle fällt auf, dass teils die Anzahl von Ecken und Flächen vertauscht ist und die Kantenanzahl gleichbleibt (u.a. beim Hexaeder und Oktaeder). Man nennt diese Körper zueinander ***duale*** Körper.

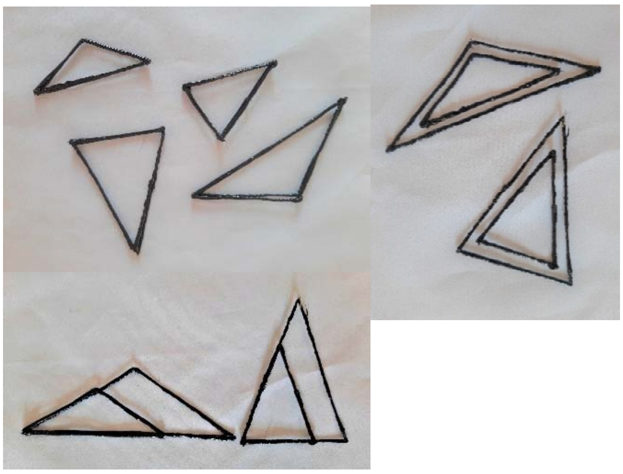


b) Diese Verwandtschaftsbeziehung der Körper untereinander erleichtert das Zeichnen der Körper, da man beispielsweise ein Kantenmodell eines Oktaeders konstruieren kann, indem die Flächenmittelpunkte benachbarter Flächen eines Hexaeders miteinander verbindet (vgl. Foto).

II. Unterrichtsvorschlag „Dreiecke untersuchen“

Zu KV 3.1.4: **Dreiecke zeichnen und untersuchen**

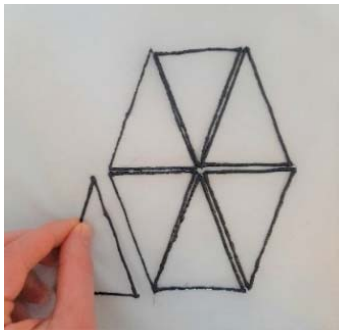
1. a)–c) Die Schülerinnen und Schüler sollen die auf der Kopiervorlage vorgezeichneten Dreiecke mit dem 3D-Druck-Stift nachzeichnen und anschließend miteinander vergleichen. Wie in den Anregungen zur Unterrichtsgestaltung bereits festgehalten wurde, können sie die Dreiecke drehen, wenden, übereinander- bzw. ineinanderlegen und identifizieren so Dreiecke, welche kongruent oder ähnlich zueinander sind.



Durch den in Aufgabenteil c) angeregten Vergleich der Ergebnisse tauschen sich die Schülerinnen und Schüler beispielsweise darüber aus, dass Dreiecke welche sich stapeln bzw. übereinanderlegen lassen dieselben Winkel und Seitenlängen besitzen und dass Dreiecke, welche sich so ineinanderlegen lassen, dass überall derselbe Abstand zwischen den Seiten besteht, zwar die gleichen Innenwinkel besitzen, aber unterschiedliche Seitenlängen aufweisen. Hierauf aufbauend können die Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke erarbeitet und besprochen werden.

2. a)–b) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler gemeinsam ausprobieren, wie sie mit ihren Dreiecken eine Fläche ohne Überlappungen auslegen können. Dies funktioniert mit kongruenten Dreiecken und wird als Parkettierung der Ebene bezeichnet (vgl. Foto unten). In Aufgabenteil b) sollen die Schülerinnen und Schüler weitere Formen, wie z.B. Quadrate,

Parallelogramme oder auch regelmäßige Sechsecke, finden, welche die Parkettierung der Ebene ermöglichen.



c) In diesem Aufgabenteil sollen die Schülerinnen und Schüler Eigenschaften der in Aufgabenteil b) erstellten Form identifizieren und reflektieren, welche dieser Eigenschaften dafür sorgen, dass eine Parkettierung der Ebene möglich ist. Damit eine Parkettierung der Ebene entstehen kann, muss unter anderem die Summe der Innenwinkel aller angrenzenden Flächen stets 360° ergeben.

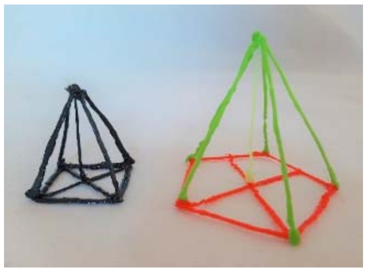
III. Unterrichtsvorschlag „Wir erstellen Pyramiden"

Zu KV 3.1.5: **Wir erstellen Pyramiden**

1. Fülle den Lückentext aus:

*Eine **regelmäßige Pyramide** ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und deren Höhe senkrecht auf dem Mittelpunkt der Grundfläche steht. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind kongruente gleichseitige Dreiecke.*

2. a)–b) Die Schülerinnen und Schüler sollen das Kantenmodell einer regelmäßigen Pyramide entsprechend der im Lückentext wiederholten Kriterien erstellen und anschließend mit einem Partner tauschen. Der Partner überprüft das erhaltene Kantenmodell auf folgende Kriterien: *Regelmäßiges Vieleck als Grundfläche, Höhe steht senkrecht auf Mittelpunkt der Grundfläche und Seitenflächen sind kongruente gleichseitige Dreiecke*. Durch die intensive Beschäftigung mit den Kriterien können die Schülerinnen und Schüler weitere Beziehungen, wie dass sich die letzten beiden Kriterien untereinander bedingen, entdecken.



c)–d) In Aufgabenteil c) sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst Konstruktionsanleitungen, wie man eine regelmäßige Pyramide besonders geschickt erstellen kann, formulieren. Besonders geschickt ist es z.B., wenn man zunächst den Mittelpunkt der Grundfläche durch das Einzeichnen von Diagonalen oder Symmetrieachsen ermittelt (vgl. Foto). Die Konstruktionsanleitungen sollen in Aufgabenteil d) untereinander ausgetauscht und getestet werden, indem die Schülerinnen und Schüler nach den erhaltenen Anleitungen weitere Pyramiden mit dem 3D-Druck-Stift erstellen.

e) Abschließend sollen alle Modelle nach ihrer Grundfläche geordnet werden. Es entstehen so entsprechend der Grundflächen verschiedene Klassen von Pyramiden (wie z.B. regelmäßige Vierecks- oder Fünfecks-Pyramiden).

3. a) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst zu zweit überlegen, wie eine **unregelmäßige Pyramide** im Vergleich zur zuvor erstellten regelmäßigen Pyramide aussehen könnte und dann ein Modell einer solchen Pyramide mit dem 3D-Druck-Stift erstellen. Einerseits ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler Pyramiden erstellen, bei welchen die Höhe nicht senkrecht auf dem Mittelpunkt der Grundfläche oder sogar nicht senkrecht auf einem beliebigen anderen Punkt der Grundfläche steht. Andererseits könnten sie Pyramiden mit unregelmäßigen Vielecken als Grundfläche entwerfen.

b) Nun vergleichen die Schülerinnen und Schüler die Modelle untereinander und sammeln (z.B. an der Tafel) Eigenschaften einer unregelmäßigen Pyramide (z.B. unregelmäßiges Vieleck als Grundfläche; Spitze nicht über dem Mittelpunkt der Grundfläche; nicht kongruente Dreiecke als Seitenflächen).

c) Die Schülerinnen und Schüler sollen eine unregelmäßige Pyramide skizzieren und eine passende Definition aus den zuvor gesammelten Eigenschaften ableiten. Zum Beispiel: *„Eine unregelmäßige Pyramide ist eine Pyramide, bei welcher die Spitze nicht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt oder die Grundfläche ein unregelmäßiges Vieleck ist."*

IV. Unterrichtsvorschlag „Funktionsgraphen untersuchen"

Zu KV 3.1.6: **Funktionsgraphen zeichnen und untersuchen**

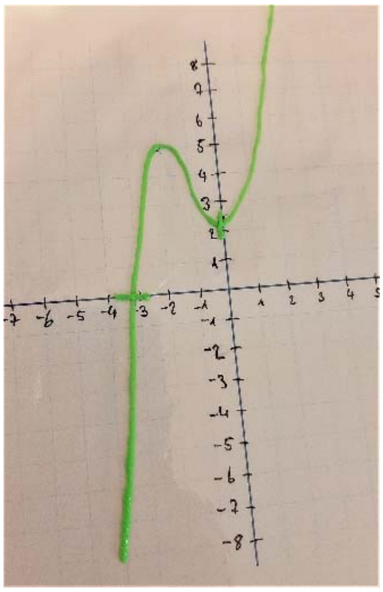
1. Wie in den Unterrichtsanregungen bereits festgehalten sollen die Schülerinnen und Schüler in dieser Aufgabe zunächst den Graphen einer beliebigen **linearen Funktion** mit dem 3D-Druck-Stift zeichnen und anschließend weitere Graphen verschiedener linearer Funktionen darstellen. Sie sollen erläutern, wie sie dabei vorgehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass sie durch das Drehen und Verschieben des zuvor gezeichneten Graphen im Koordinatensystem den Graphen einer jeden beliebigen linearen Funktion darstellen können.

2. a)–b) Hier sollen die Schülerinnen und Schüler Graphen verschiedener **quadratischer Funktionen** mit dem 3D-Druck-Stift zeichnen und ihr Vorgehen erläutern. Die Schülerinnen und Schüler erkennen Beziehungen zwischen verschiedenen Funktionen und nutzen diese, wie z.B. das Umklappen bzw. Spiegeln des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ (Normalparabel) an der x-Achse, um den Graphen der Funktion $f(x) = -x^2$ darzustellen, oder auch das Verschieben der Normalparabel in x- und y-Richtung, um die Graphen der Funktionen $f(x) = (x+2)^2$ und $f(x) = x^2 - 2$ darzustellen. Sie erkennen und erläutern auch, dass es sich bei den Graphen der Funktionen $(x) = 2x^2$ und $f(x) = 0{,}5x^2$ um eine gestreckte bzw. gestauchte Normalparabel handelt.

c) In diesem Aufgabenteil sollen die Schülerinnen und Schüler anhand der zuvor 3D-gezeichneten Graphen zeigen und erläutern, dass die Graphen einer linearen Funktion und einer quadratischen Funktion maximal zwei Schnittpunkte haben können.

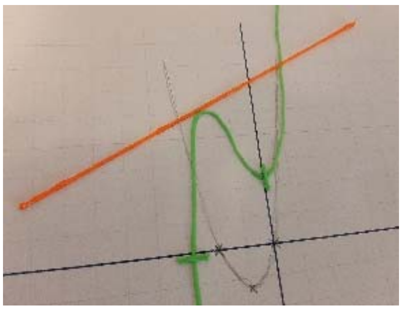
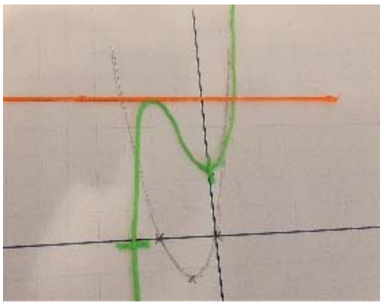
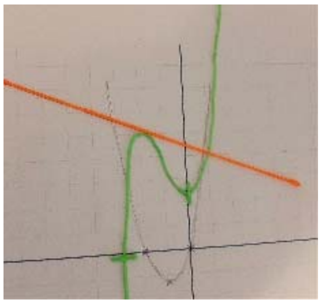
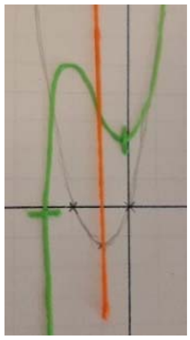
Zu KV 3.1.7: **Der Graph einer Ableitungsfunktion**

1. a) Die Schülerinnen und Schüler sollen mit dem 3D-Druck-Stift eine beliebige ganzrationale Funktion höheren Grades zeichnen. Dabei ist darauf zu achten, dass sie die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse markieren, um ein korrektes Platzieren im Koordinatensystem der Mitschülerinnen und Mitschüler zu ermöglichen (vgl. Foto).



b) Die Schülerinnen und Schüler tauschen ihre Funktionsgraphen untereinander aus und platzieren sie in ihrem Koordinatensystem. Sie sollen nun den zugehörigen **Graphen der Ableitungsfunktion** mit Bleistift in das Koordinatensystem zeichnen.

c) Nun zeichnen die Schülerinnen und Schüler (entlang eines Lineals oder einer Kante) eine Gerade und verwenden diese, um den Verlauf der von ihnen gezeichneten bzw. skizzierten Ableitungsfunktion zu überprüfen. Sie können die gezeichnete Gerade als Tangente an beliebige Punkte des Funktionsgraphen anlegen und so den Verlauf der Ableitungsfunktion begründen.

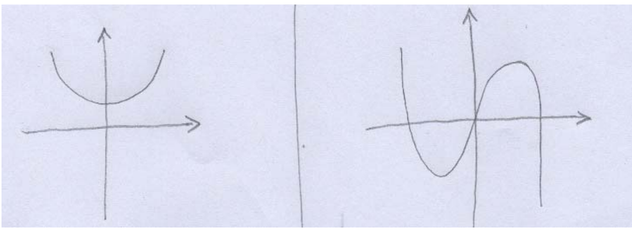
Die Schülerinnen und Schüler können anhand der Steigung der Tangente verschiedene Charakteristika der Ableitungsfunktion begründen (z.B. Nullstelle, wenn Steigung der Tangente gleich Null ist oder Extremstelle, wenn Wendestelle vorliegt).

2. a) Die Schülerinnen und Schüler erläutern hier mithilfe der in 1c) gezeichneten Geraden, dass sich der Graph der Ableitungsfunktion bei Verschiebung des zugehörigen Stammfunktionsgraphs in y-Richtung nicht verschiebt.

b) Die Schülerinnen und Schüler erläutern hier ebenfalls mithilfe der in 1c) gezeichneten Geraden, dass sich der Graph der Ableitungsfunktion bei Verschiebung des zugehörigen Stammfunktionsgraphs in x-Richtung um den gleichen Abstand ebenfalls in x-Richtung verschiebt.

Zu KV 3.1.8 a: **Graphen auf Symmetrien untersuchen**

1. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Begriffe **Achsen- und Punktsymmetrie** bezogen auf einen Funktionsgraphen mit eigenen Worten erklären und entsprechende Beispielgraphen (vgl. Foto) skizzieren.

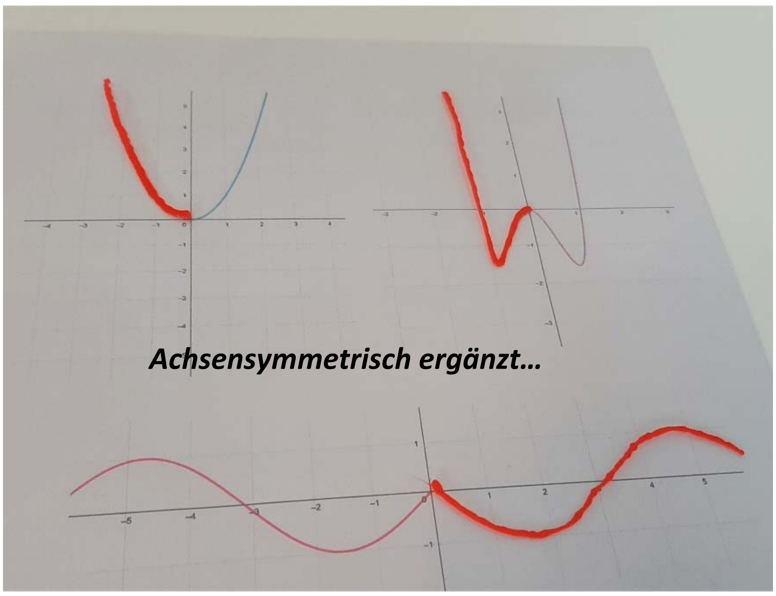


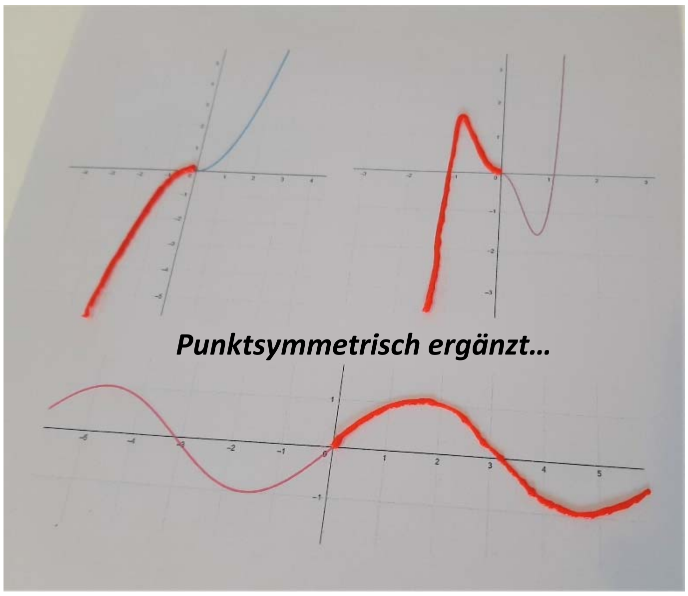
„Ein Graph heißt achsensymmetrisch, wenn er durch eine Gerade (Symmetrieachse, hier die y-Achse) in zwei kongruente Teilkurven unterschiedlicher Orientierung zerlegt werden kann. Ein Graph heißt punktsymmetrisch, wenn er bezüglich eines Drehzentrums (Symmetriezentrum, hier Ursprung) um 180° drehsymmetrisch ist."

2. a)–b) Die Schülerinnen und Schüler sollen die vorgegebenen Graphen mit einem 3D-Druck-Stift nachzeichnen und so ergänzen, dass eine zur y-Achse achsen- oder zum Ursprung punktsymmetrische Funktion entsteht (vgl. Foto unten).

Ein zur y-Achse achsensymmetrischer Graph ist daran zu erkennen, dass sein Verlauf durch das Wenden bzw. Spiegeln an der y-Achse unverändert bleibt. Ein zum Ursprung punktsymmetrischer Graph hingegen ist daran zu erkennen, dass sein Verlauf bei einer Drehung um 180° um den Ursprung unverändert bleibt.

c) Bei dem unteren, abgebildeten Graphen handelt es sich genau dann um eine periodische Funktion, wenn die Funktion als zum Ursprung punktsymmetrische Funktion weitergeführt bzw. ergänzt wird, da die Funktion dann in gleichmäßigen Abständen die gleichen (bzw. wiederkehrende) Werte zwischen -1 und 1 annimmt.





Zu KV 3.1.8 b: **Graphen auf Symmetrien untersuchen**

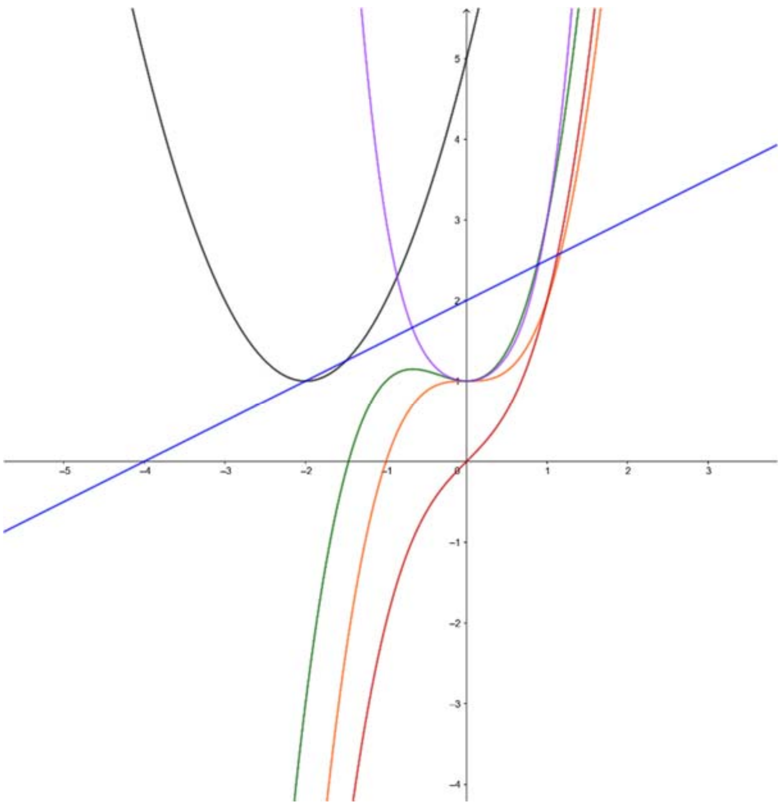
3. a) Achsen- und Punksymmetrie ist eine Eigenschaft, die unabhängig vom Koordinatensystem ist, sie bleibt bei allen Verschiebungen entlang der x-Achse und/oder der y-Achse erhalten. Dabei ändert sich die Lage der Symmetrieachsen bzw. -zentren.

b) Mit der Kurve bzw. dem Graph einer periodischen Funktion kann man durch entsprechende Verschiebung in x-Richtung die trigonometrischen Funktionen (Sinus- oder Kosinus-Funktion) darstellen.

4. Für die Funktionswerte einer zur y-Achse achsensymmetrischen Funktion muss folgende Bedingung gelten: $f(x) = f(-x)\; für\; alle\; x \in \mathbb{D}_f$. Anhand des Graphen können die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass die Funktion für den gleichen positiven oder negativen x-Wert (z.B. $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$) denselben Funktionswert annimmt. * Wenn die Funktion nicht zur y-Achse, sondern zu einer beliebigen zur y-Achse parallelen Geraden mit der Gleichung $x = a$ achsensymmetrisch verläuft, dann muss dementsprechend folgende Bedingung gelten: $f(a-x) = f(a+x)$.

5. Für die Funktionswerte einer zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion muss folgende Bedingung gelten: $f(-x) = -f(x)\; für\; alle\; x \in \mathbb{D}_f$. Anhand des Graphen können die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass die Funktion für den gleichen positiven oder negativen x-Wert (z.B. $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$) nicht denselben Funktionswert, sondern den an der x-Achse gespiegelten Funktionswert annimmt. * Wenn die Funktion nicht zum Ursprung, sondern zu einem beliebigen Zentrum mit den Koordinaten $(a|b)$ punktsymmetrisch verläuft, dann muss dementsprechend folgende Bedingung gelten: $f(a+x) - b = -f(a-x) + b$.

6. Abbildung der Funktionsgraphen:



a) $\boldsymbol{f(x) = (x+2)^2 + 1}$

→ achsensymmetrisch, Symmetrieachse: $x = -2$

b) $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 1}$

→ punktsymmetrisch, Symmetriezentrum: $Z(0|1)$

c) $\boldsymbol{f(x) = x(x^2 + 1)}$

→ punktsymmetrisch zum Ursprung $Z(0|0)$

d) $\boldsymbol{f(x) = 0,5x + 2}$

→ punktsymmetrisch, Symmetriezentrum: $Z(0|2)$

e) $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 + 1}$

→ punktsymmetrisch, Symmetriezentrum: $Z(-\frac{1}{3}|\frac{29}{27})$

f) $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 + 1}$

→ achsensymmetrisch zur y-Achse