

# INHALT

EINLEITUNG.....	17
1    Beweisen – ein zentrales Thema.....	17
1.1  Zielsetzung der Arbeit .....	20
1.2  Unterschiedliche Perspektiven.....	22
1.3  Unterricht als Angebot-Nutzungs-Struktur.....	25
1.4  Aufbau der Arbeit.....	27
THEORETISCHE GRUNDLAGEN .....	29
2    Beweis und Beweisen vom Fach her gesehen .....	29
2.1  Zum Begriff des Beweises .....	30
2.1.1  Begriffsklärung: Beweisen – Beweis .....	30
2.1.2  Unterschiedliche Akzentuierungen einzelner Aspekte.....	32
2.2  Zur Funktion des Beweises .....	39
2.3  Zur Bedeutung des Beweises.....	41
2.3.1  Kulturumspannende Bedeutung.....	41
2.3.2  Kommunikative Bedeutung .....	41
2.3.3  Unterschiedliche Bedeutung im Wandel der Zeit.....	43
2.3.4  Kontext Leistungsmessungsstudien und Bildungsstandards.....	43
2.4  Beweisprobleme und Problemlösetypen .....	47
2.4.1  Problemlösetypen .....	47
2.4.2  Beweis- und Bestimmungsaufgaben .....	49
2.5  Verschiedene Typen von Beweisen .....	50
2.5.1  Beweise aus mathematischer Sicht.....	50
2.5.2  Pragmatisches und intellektuelles Beweisen .....	50
2.5.3  Kategorisierung von Beweisen nach Wittmann und Müller (1988).....	52
2.5.4  Verschiedene Beweisansätze von Leiss und Blum (2006) .....	55
2.5.5  Ausdifferenzierung des inhaltlich-anschaulichen Beweises: Synthese .....	56
2.5.6  Genetisches Beweisen.....	58
2.6  Beweis und Beweisen – Inhalt und Gegenstand der Unterrichtsforschung ....	59
2.7  Fazit: Beweis – Beweisen.....	61
3    Bedeutsame psychologische Prozesse beim Beweisen.....	62
3.1  Mathematisches Verstehen als Ziel und Ausgangslage .....	62
3.1.1  Verstehen: Begriffsklärung.....	63
3.1.2  Verstehen und Problemlösen.....	65
3.1.3  Verstehen von Beweisen .....	66
3.1.4  Die Warum-Frage als Auslöser des Beweisprozesses.....	67
3.1.5  Verstehenselemente – die inhaltlichen Bausteine .....	69
3.2  Modellieren – auch beim Beweisen.....	70
3.2.1  Der Modellierungsprozess in der Übersicht.....	71
3.2.2  Beweisen: spezifische Art des Modellierens .....	76
3.2.3  Verstehenselemente: Semantik und Syntaktik.....	76
3.3  Richtungen des Denkens und logisches Schliessen .....	78
3.3.1  Zwei Denkrichtungen: Induktion und Deduktion .....	78
3.3.2  Weitere Begründungsarten .....	79
3.3.3  Arten des schlussfolgernden Denkens .....	80

3.3.4	Entwicklung des schlussfolgernden Denkens .....	82
3.3.5	Verifikation – Falsifikation – Validierung .....	83
3.4	Formulieren – Denken und Sprechen .....	83
3.4.1	Denken und Sprechen .....	84
3.4.2	Formulieren: Verstandenes in eine Form bringen .....	87
3.4.3	Alltagsbegriff und wissenschaftlicher Begriff .....	89
3.4.4	Begriffsbildung als Arbeit an der Sprache .....	92
3.5	Argumentieren als schlussfolgernde Spracharbeit .....	99
3.5.1	Argumentieren: Begriffsklärung .....	99
3.5.2	Die Struktur eines Arguments .....	100
3.5.3	Argumentieren – ein psychosozialer Prozess .....	103
3.5.4	Argumentieren aus Sicht der Bildungsstandards .....	105
3.5.5	Beweisen und Argumentieren: Gleiches oder Unterschiedliches? .....	106
3.6	Fazit: Prozessmodell des mathematischen Beweisen .....	108
4	Unterricht und unterrichtliches Handeln beim Beweisen .....	116
4.1	Die Lehrpersonen und ihr Handeln beim Beweisen .....	116
4.1.1	Überzeugungen von Lehrpersonen .....	116
4.1.2	Wissensbereiche von Lehrpersonen .....	121
4.1.3	Emotionale und motivationale Aspekte .....	126
4.1.4	Gestaltung der Lerngelegenheiten im Unterricht .....	128
4.2	Die Lernenden beim Beweisen .....	131
4.2.1	Beweiskompetenz .....	131
4.2.2	Motivationale Aspekte und Interesse beim Beweisen .....	137
4.2.3	Emotionale Aspekte beim Beweisen .....	139
4.2.4	Schwierigkeiten der Lernenden mit und beim Beweisen .....	139
4.2.5	Mathematikunterricht aus Sicht der Lernenden .....	142
4.3	Lernhilfe- und Unterstützungskultur beim Beweisen .....	143
4.3.1	Grundsätzliche Überlegungen zur Gestaltung von Beweisphasen .....	145
4.3.2	Bedingungen für produktives Argumentieren .....	149
4.3.3	Modelle für die Gestaltung von mathematischen Beweisphasen .....	150
4.3.4	Unterstützung mittels Heuristik .....	157
4.3.5	Partizipation der Lernenden an der Tätigkeit des Beweisen .....	162
4.3.6	Didaktische Kommunikation und Klassengespräch .....	167
4.4	Fazit: Unterricht und unterrichtliches Handeln .....	174
	ERKENNTNISINTERESSE, ZIELSETZUNGEN, KONTEXT UND FRAGESTELLUNGEN .....	176
5	Erkenntnisinteresse im Kontext einer binationalen Studie .....	176
5.1	Zentrale Aspekte und Forschungslücken .....	176
5.2	Erkenntnisinteresse .....	179
5.3	Kontext dieser Arbeit .....	180
6	Fragestellungen .....	182
6.1	Beschreibung von Beweissequenzen .....	182
6.1.1	Entwicklung des Analyseinstruments .....	183
6.1.2	Deskription der Beweissequenzen .....	183
6.2	Gestaltung von Beweissequenzen und weitere Daten auf Klassenebene .....	184
6.2.1	Beweissequenzen und Überzeugungen der Lehrpersonen .....	184
6.2.2	Beweissequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität .....	185
6.2.3	Beweissequenzen – unabhängig vom Inhalt? .....	186

6.2.4	Beweissequenzen und mittlere Leistungsfähigkeit der Klasse .....	187
6.3	Wirksamkeit und bestimmte Konfigurationen von Beweissequenzen .....	187
6.4	Adaptivität unterschiedlicher Konfigurationen von Beweissequenzen .....	188
6.5	Argumentations- und Partizipationsstrukturen in Extremklassen .....	189
6.6	Empirische Arbeit im Überblick .....	189
AUFGABE UND AUFGABENANALYSE.....		192
7	Aufgabenanalyse .....	192
7.1	Aufgabe und Aufgabentyp .....	193
7.2	Aufgabenmerkmale .....	194
7.2.1	Aufgabenkern.....	194
7.2.2	Mathematisches Stoffgebiet .....	196
7.2.3	Aufgabenperipherie.....	196
7.2.4	Strukturbildende Aspekte der Aufgabe .....	197
7.3	Didaktische Qualität der Aufgabe .....	202
7.4	Konsequenzen für die Bearbeitung der „Speziellen Aufgabe“ .....	205
7.5	Verstehenselemente und mathematischer Hintergrund.....	208
7.5.1	Mathematischer Hintergrund der „Speziellen Aufgabe“ .....	208
7.5.2	Zentrale Verstehenselemente der „Speziellen Aufgabe“ .....	208
7.5.3	Verstehenselemente umgesetzt in den verschiedenen Beweistypen .....	211
QUANTITATIVER TEIL: METHODEN UND ERGEBNISSE.....		222
8	Methode Teilstudie I: Videoanalyse.....	222
8.1	Datensatz .....	222
8.1.1	Videodaten.....	222
8.1.2	Stichprobe.....	223
8.1.3	Analyseeinheit .....	225
8.2	Analyseinstrument .....	225
8.2.1	Dimensionen des Analyseinstruments.....	226
8.2.2	Analyseinstrument in der Übersicht .....	232
8.2.3	Kategorien im Einzelnen.....	235
8.2.4	Einschätzung der Items .....	252
8.2.5	Reliabilität des Instrumentes .....	260
8.3	Vorgehensweise .....	263
8.3.1	Videoanalyse.....	263
8.4	Datenauswertung.....	266
8.4.1	Nominal und ordinal skalierte Daten .....	266
8.4.2	Berechnete Variablen und metrisch skalierte Daten .....	267
8.4.3	Mittelwertsvergleiche .....	267
9	Methode Teilstudie II: quantitative Datenanalyse .....	268
9.1	Datensatz und Stichprobe .....	268
9.2	Daten auf Klassenebene .....	268
9.2.1	Befragungsdaten Lehrpersonen.....	269
9.2.2	Daten aus dem hochinferenten Rating der Textaufgabeneinheit.....	272
9.2.3	Daten aus der Pythagoraseinheit: Beweiselemente.....	273
9.2.4	Leistungsdaten der Lernenden auf Klassenebene.....	275
9.2.5	Daten zur Veränderung von Leistung, Motivation und Interesse.....	277
9.2.6	Befragungsdaten der Lernenden, Eingangsbefragung .....	277

9.2.7	Befragungsdaten der Lernenden, unmittelbar nach der Videosequenz..	279
9.2.8	Befragungsdaten der Lernenden, Ausgangsbefragung.....	280
9.3	Datenerhebung und -auswertung.....	280
10	Ergebnisse Teilstudie I: quantitative Auswertung aller Fälle.....	281
10.1	Deskription der Beweisequenzen .....	282
10.1.1	Bearbeitungsrahmen und Kontext der Aufgabenbearbeitung.....	282
10.1.2	Sprache, Begrifflichkeiten und Metakommentare.....	283
10.1.3	Bearbeitungshilfen und Arten des Schliessens .....	283
10.1.4	Art des Beweises .....	284
10.1.5	Heuristik.....	285
10.1.6	Verstehenselemente.....	286
10.1.7	Bearbeitung von Aufgabenmerkmalen.....	291
10.1.8	Effizienz der Bearbeitung.....	292
10.1.9	Fachliche Fehler.....	294
10.1.10	Kommunikationsmuster.....	295
10.1.11	Eine besondere Gruppe: mehrdimensionales Beweisen.....	303
10.2	Systematische Zusammenhänge und Abhängigkeiten.....	307
10.2.1	Korrelationen .....	307
10.2.2	Zusammenhänge mit der Art des durchgeführten Beweises .....	311
10.2.3	Gruppenunterschiede.....	315
10.3	Zusammenfassung und Beantwortung der Fragestellungen .....	317
10.3.1	Zusammenfassung und Beantwortung der Fragestellungen .....	317
11	Ergebnisse Teilstudie II: weitere Daten .....	322
11.1	Gestaltung von Beweisequenzen und Merkmale der Lehrpersonen .....	324
11.1.1	Gruppenvergleiche .....	325
11.1.2	Korrelationen .....	327
11.1.3	Zusammenfassung Gruppenvergleiche nach Beweistyp .....	329
11.1.4	Zusammenfassung Korrelationen.....	333
11.2	Gestaltung von Beweisequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität.....	337
11.2.1	Gruppenvergleiche .....	337
11.2.2	Korrelationen .....	338
11.2.3	Zusammenfassung Qualitätsmerkmale nach Beweistyp.....	339
11.2.4	Zusammenfassung Korrelationen.....	341
11.3	Gestaltung von Beweisequenzen – unabhängig vom Inhalt? .....	343
11.3.1	Gruppenvergleiche .....	343
11.3.2	Korrelationen .....	344
11.3.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche .....	344
11.3.4	Zusammenfassung der Korrelationen .....	347
11.4	Gestaltung von Beweisequenzen und Leistungsfähigkeit der Klassen.....	349
11.4.1	Gruppenvergleiche .....	350
11.4.2	Korrelationen .....	351
11.4.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche .....	352
11.4.4	Zusammenfassung der Korrelationen .....	354
11.5	Wirksamkeit: Veränderungen über das Jahr .....	356
11.5.1	Gruppenvergleiche .....	356
11.5.2	Korrelationen .....	358
11.5.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche .....	359

11.5.4	Zusammenfassung der Korrelationen .....	363
11.6	Gestaltung von Beweisssequenzen und die Sichtweise der Lernenden.....	366
11.6.1	Gruppenvergleiche .....	367
11.6.2	Korrelationen .....	368
11.6.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche .....	370
11.6.4	Zusammenfassung der Korrelationen .....	373
QUALITATIVER TEIL: METHODEN UND ERGEBNISSE.....		379
12	Methode der qualitativen Fallanalyse.....	379
12.1	Fragestellungen, Leitfragen und Falldefinition.....	379
12.1.1	Fragestellungen und Leitfragen .....	379
12.1.2	Art der Fallstudie und Definition des Falles.....	380
12.2	Datensatz und Stichprobe .....	380
12.2.1	Vorannahmen.....	381
12.2.2	Kriterien für die Fallauswahl.....	381
12.2.3	Ausgewählte Fälle .....	383
12.3	Einbezogene Daten .....	383
12.3.1	Daten aus Teilstudie I und Teilstudie II .....	384
12.3.2	Weitere Daten .....	384
12.4	Datenauswertung.....	386
12.4.1	Gewählter Zugang.....	386
12.4.2	Fünf Bearbeitungsschritte bei der Datenauswertung.....	387
12.5	Ergebnisdarstellung.....	392
13	Ergebnisse Teilstudie III: Extremklassen.....	392
13.1	Die beiden ausgewählten Fälle in Teilstudie I und II.....	393
13.1.1	Die beiden Fälle in der Videoanalyse.....	393
13.1.2	Befragungsdaten Lehrpersonen.....	396
13.1.3	Daten der Schülerinnen und Schüler auf Klassenebene .....	401
13.1.4	Fazit .....	406
13.2	Fall A: Grösster mittlerer Leistungszuwachs.....	407
13.2.1	Wie entwickelt sich das Thema?.....	407
13.2.2	Wie wird begründet und erklärt? .....	418
13.2.3	Wie wird interagiert? .....	421
13.2.4	Wie erklärt die Lehrperson ihr Handeln?.....	424
13.3	Fall B: Geringster mittlerer Leistungszuwachs während des Jahres.....	427
13.3.1	Wie entwickelt sich das Thema?.....	427
13.3.2	Wie wird begründet und erklärt? .....	449
13.3.3	Wie wird interagiert? .....	455
13.3.4	Wie erklärt die Lehrperson ihr Handeln?.....	458
13.4	Vergleich der Argumentations- und Partizipationsstrukturen .....	461
13.4.1	Vergleich der beiden Fälle in den fünf Aspekten.....	461
13.4.2	Fazit .....	472
ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION.....		474
14	Diskussion der Ergebnisse .....	474
14.1	Zentrale Ergebnisse der Analyse aller Fälle aus Teilstudie I.....	474
14.1.1	Beschreibung der Beweiskultur .....	474
14.1.2	Systematische Abhängigkeiten und Zusammenhänge der Merkmale.....	483

14.2	Diskussion der Befunde aus Teilstudie II in Form von Thesen.....	488
14.2.1	Beweissequenzen und Überzeugungen der Lehrpersonen.....	489
14.2.2	Beweissequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität.....	492
14.2.3	Beweissequenzen – unabhängig vom Inhalt? .....	493
14.2.4	Beweissequenzen und Leistungsfähigkeit der Klasse/Adaptivität .....	494
14.2.5	Wirksamkeit und bestimmte Konfigurationen von Beweissequenzen...	496
14.2.6	Sichtweise der Lernenden.....	498
14.2.7	Weitere Aspekte .....	500
14.3	Diskussion zentraler Ergebnisse der Fallstudie (Teilstudie III).....	501
14.3.1	Einschätzung von Unterrichtsqualität und Bildungswirkungen .....	501
14.3.2	Zusammenfassung in Form von Thesen .....	506
	RÜCKBLICK UND AUSBLICK.....	515
15	Rückblick und Ausblick .....	515
15.1	Schlussfolgerungen zum Beweisen, Begründen und Argumentieren.....	515
15.1.1	Konsequenzen für die Tätigkeit des Beweizens im Unterricht.....	515
15.1.2	Konsequenzen für den Mathematikunterricht .....	516
15.1.3	Konsequenzen für die Praxis .....	517
15.1.4	Konsequenzen für die Forschung.....	519
15.2	Rückblick und Ausblick .....	520
15.2.1	Beitrag Theorieentwicklung .....	520
15.2.2	Diskussion des methodischen Vorgehens .....	521
15.2.3	Grenzen der vorliegenden Studien.....	525
15.2.4	Ausblick.....	526
	LITERATUR .....	528
	ABBILDUNGSVERZEICHNIS .....	550
	TABELLENVERZEICHNIS.....	555