

# Inhalt

<b>Zusammenfassung</b> .....	13
<b>1 Einleitung</b> .....	17
1.1 Problemstellung und Ziele.....	17
1.2 Zwei Einstiege in den Satz des Pythagoras .....	20
1.3 Gliederung .....	24
<b>2 Mathematikverstehen aus verschiedenen Perspektiven</b> .....	26
2.1 Einleitung: Was heisst Mathematikverstehen?.....	26
2.2 Mathematikverstehen aus der Sicht der Disziplin .....	37
2.2.1 Was ist Mathematik? .....	39
2.2.2 Eigenheiten von mathematischen Strukturen: Begriffe und Sätze .....	44
2.2.3 Wie arbeiten Mathematikerinnen und Mathematiker? .....	47
2.3 Mathematikverstehen aus Sicht der Kognitionspsychologie und der Fachdidaktik .....	50
2.3.1 Lehr-Lernverständnis und zentrale Folgen für den Mathematikunterricht.....	51
2.3.2 Verknüpfen, Verdichten und Einebnen – Strukturaufbau nach Aebli.....	60
2.3.3 Der Begriff des Sinnflusses – Vom individuellen Verstehen zur Unterrichtsqualität .....	73
2.3.4 Repräsentationen und Verstehen – Verstehen von fachlichen Repräsentationen im Mathematikunterricht .....	79
2.3.4.1 Repräsentationen und Verstehen aus kognitionspsychologischer Sicht.....	80
2.3.4.2 Mathematische Repräsentationen vom Fach aus gedacht .....	85
2.3.4.3 Repräsentationen und Verstehen im Mathematikunterricht .....	90
2.3.5 Verstehen als Problemlösen.....	97
2.3.5.1 Verstehen als Problemlösen – ein Beispiel zum Satz des Pythagoras.....	98
2.3.5.2 Begriff des Problems aus kognitionspsychologischer Sicht.....	99
2.3.5.3 Verstehen als Problemlösen.....	101
2.3.5.4 Folgerungen für die Anleitung von Verstehensprozessen zu einem konkreten Konzept im Mathematikunterricht.....	105
2.3.5.5 Sehen von inneren Beziehungen – Wertheimer.....	108
2.3.6 Überzeugungen, Emotionen, Motivation und Verstehen .....	117
2.3.7 Qualitätsmerkmale von Unterricht in Bezug auf Konzeptverstehen aus Sicht der empirischen Unterrichtsforschung .....	128
2.3.7.1 Verknüpfungen bei Aufgabenstellung und Aufgabebearbeitung (TIMSS-Videostudien) .....	131
2.3.7.2 Klarheit, Strukturiertheit und Kohärenz im Unterricht.....	135
2.3.7.3 Zwei Unterrichtsqualitätsmerkmale in Bezug auf konzeptuelles Verstehen im Mathematikunterricht – Hiebert und Grouws .....	148
2.3.7.4 Kognitive Aktivierung .....	152

2.3.7.5	Folgerungen für das Bestimmen von fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten der Anleitung von Verstehensprozessen zu einem konkreten Konzept.....	155
<b>3</b>	<b>Verstehen als Herstellen von Verknüpfungen und Sinn – am Beispiel des Satzes des Pythagoras</b> .....	<b>157</b>
3.1	Der Satz des Pythagoras .....	157
3.1.1	Das Besondere am Satz des Pythagoras als Schulstoff .....	158
3.1.2	Fachliche Repräsentationen des Satzes des Pythagoras .....	158
3.1.3	Worauf man bei der Anwendung des Satzes des Pythagoras achten muss .....	163
3.1.4	Schülervorstellungen des Satzes des Pythagoras.....	164
3.2	Verschiedene Arten von Verknüpfungen .....	166
3.2.1	Warum Verknüpfungen beim Verstehen im Unterricht so wichtig sind – eine Zusammenfassung.....	167
3.2.2	Verschiedene Arten von Verknüpfungen am Beispiel des Satzes des Pythagoras.....	170
3.2.2.1	Verknüpfungen innerhalb des Konzepts.....	170
3.2.2.2	Zwei Arten der Verknüpfungen von Repräsentationen .....	173
3.2.2.3	Verknüpfungen innerhalb von Beweisen.....	174
3.2.2.4	Verknüpfungen mit anderen Konzepten .....	174
3.2.2.5	Viele weitere Verknüpfungen.....	176
<b>4</b>	<b>Verstehenselemente und strukturelle Klarheit als zentrale fachdidaktische Unterrichtsqualitäten</b> .....	<b>179</b>
4.1	Pythagoras-Verstehensmodell .....	181
4.1.1	Verknüpfungen mit anderen Konzepten .....	182
4.1.2	Verknüpfungen zwischen Repräsentationen.....	184
4.1.3	Verknüpfungen zwischen Verstehenselementen .....	185
4.1.4	Der Zusammenhang zwischen den drei Verknüpfungsarten .....	188
4.1.4.1	Verstehensprozesse aus der Sicht eines Novizen .....	192
4.1.4.2	Denkweisen aus der Sicht eines Experten .....	195
4.1.5	Allgemeine Bemerkungen zum Pythagoras-Verstehensmodell .....	196
4.2	Allgemeine Formulierung der Verstehenselemente .....	197
4.3	Fachdidaktische Unterrichtsqualität in Bezug auf die Anleitung von Verstehensprozessen bei der Einführung eines neuen Konzepts.....	202
4.3.1	Vorkommen von Verstehenselementen und Qualität der Repräsentationen.....	203
4.3.2	Strukturelle Klarheit .....	206
4.3.3	Zusammenfassung: Drei fachdidaktische Unterrichtsqualitäten .....	210
<b>5</b>	<b>Fragestellungen</b> .....	<b>214</b>
5.1	Rating der fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten.....	216
5.2	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und Leistungsstand.....	217
5.3	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und kognitive Aktivierung .....	217

<b>6</b>	<b>Methode</b> .....	219
6.1	Datenerhebung .....	220
6.2	Stichprobe .....	221
6.3	Videobasierte Unterrichtsanalyse .....	223
6.3.1	Analyseeinheit .....	226
6.3.2	Beispiele aus den Videodaten .....	229
6.3.2.1	Beispiele von Einstiegen in den Satz des Pythagoras .....	229
6.3.2.2	Beispiele von Formulierungen des Satzes des Pythagoras im Unterricht .....	233
6.3.2.3	Beispiel eines Beweises des Satzes des Pythagoras .....	235
6.3.2.4	Beispiele von Aufgaben zum Satz des Pythagoras .....	238
6.4	Instrumente zur Erfassung der fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten .....	242
6.4.1	Erstes Instrument: Vorkommen der Verstehenselemente .....	244
6.4.2	Zweites Instrument: Qualität der Repräsentationen des Satzes des Pythagoras .....	249
6.4.3	Drittes Instrument: Strukturelle Klarheit .....	257
6.4.4	Zusammenhänge zwischen den drei Instrumenten .....	259
6.5	Fragebogen zur Erfassung der individuellen Lernvoraussetzungen .....	260
6.6	Tests zur Erfassung des Leistungsstands .....	261
6.6.1	Vortest zur Erfassung des Vorwissens .....	261
6.6.2	Nachtest .....	265
6.7	Hoch inferentes Rating zur Erfassung der kognitiven Aktivierung .....	268
<b>7</b>	<b>Ergebnisse</b> .....	270
7.1	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten .....	270
7.1.1	Vorkommen der Verstehenselemente .....	270
7.1.2	Qualität der Repräsentationen des Satzes des Pythagoras .....	273
7.1.3	Strukturelle Klarheit .....	278
7.1.4	Alle drei fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten im Vergleich .....	279
7.2	Korrelationen zwischen den drei fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten .....	280
7.3	Länder- und Schulformunterschiede .....	282
7.4	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und Leistungsstand .....	282
7.5	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und kognitive Aktivierung .....	284
<b>8</b>	<b>Diskussion</b> .....	286
8.1	Zusammenfassung der zentralen Befunde .....	287
8.1.1	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten .....	287
8.1.2	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und Leistungsstand .....	288
8.1.3	Fachdidaktische Unterrichtsqualitäten und allgemeine kognitive Aktivierung .....	289
8.2	Methodische Überlegungen .....	290
8.2.1	Spezielles Forschungsdesign .....	290
8.2.2	Einschränkungen und Grenzen .....	291

8.2.3	Methodische Anforderungen beim Erheben der drei fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten.....	292
8.2.4	Leistungstests.....	294
8.3	Überlegungen zum Pythagoras-Verstehensmodell.....	295
8.3.1	Kurzzusammenfassung des Pythagoras-Verstehensmodells und der daraus bestimmten Unterrichtsqualitäten .....	295
8.3.2	Grenzen und Einschränkungen des Modells.....	301
8.3.3	Überlegungen zur Generalisierbarkeit des Pythagoras-Verstehensmodells und der daraus bestimmten fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten .....	302
8.4	Ausblick auf weiterführende Auswertungen .....	310
8.5	Überlegungen zum Begriff der allgemein- und fachdidaktischen Unterrichtsqualität .....	311
8.5.1	Bedeutung der Standardisierung des Inhalts und des Lernziels für die Bestimmung der fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten in dieser Arbeit .....	312
8.5.2	Wie wurde die fachdidaktische Unterrichtsqualität in dieser Arbeit konzeptualisiert? .....	314
8.5.3	Zwei Unterrichtsqualitätsmerkmale aus allgemein- und fachdidaktischer Sicht betrachtet .....	316
8.5.3.1	Kognitive Aktivierung .....	316
8.5.3.2	Klarheit – allgemein und inhaltlich erfasst.....	319
8.5.4	Überlegungen zum Verhältnis fachdidaktischer und allgemeindidaktischer Unterrichtsqualitäten .....	324
8.6	Überlegungen zum fachdidaktischen Lehrerwissen .....	325
8.6.1	Heuristiken zum Auffinden von Verstehenselementen und zur Planung von strukturell klarem Unterricht .....	325
8.6.2	Vergleich mit der Definition von fachdidaktischem Wissen in COACTIV .....	330
8.6.3	Über den Zusammenhang zwischen fachdidaktischem Wissen und Fachwissen.....	331
8.7	Folgerungen für die Lehrerbildung.....	332
8.7.1	Das Problem des Auffaltens der fachlichen Struktur .....	334
8.7.2	Unterscheidung von Darstellung und Bedeutung.....	335
8.7.3	Verstehenselemente als Hilfsmittel für den Unterricht, insbesondere zur Unterrichtsvorbereitung.....	335
8.7.4	Videsequenzen zum Sichtbarmachen der fachdidaktischen Unterrichtsqualitäten.....	337
<b>9</b>	<b>Literatur</b> .....	<b>339</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>357</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	<b>358</b>